

Module de logique

Mmes Hoebanx – Lamon - Malfait

Objectifs de ce module

1. Prendre conscience de la structure de la langue et du rôle des connecteurs logiques.
2. Améliorer sa compréhension des textes en général et des énoncés en particulier.
3. Mieux construire et structurer un raisonnement.

Types de phrases

Exemples à analyser :

1. Quelle heure est-il ?
2. Viens avec moi !
3. Tous les élèves sont présents aujourd'hui.
4. Certains élèves sont absents.
5. Je mens.
6. Si un étudiant a plus de 60 % de moyenne et en MLF et s'il n'a aucun échec, il réussit d'office.

* * *

(ce dessin signifie
"prendre le temps de faire ce qui est demandé avant d'aller plus loin")

Première remarque : la logique envisage uniquement les phrases des types 3, 4 et 6.

Elles sont appelées "propositions" ou assertions.

Elles peuvent être vraies ou fausses, valides ou non (validité du lien logique).

Si l'énonciation n'est pas neutre, on parle de modalisation en français.

Autres exemples et contrexemples:

- ▶ a) *Bonjour !*
- ▶ b) *Quel temps fait-il ?*
- ▶ c) *Le ciel est bleu.*
- ▶ d) *Il est 9h.*
- ▶ e) *Je n'ai pas faim.*

Différence entre phrase négative et négation

- ▶ Chercher les liens entre les phrases suivantes :
- 1. Cette pomme est verte.
- 2. Cette pomme est rouge.
- 3. Cette pomme n'est pas verte.
- 4. Cette pomme n'est ni verte ni rouge.
- 5. Cette pomme est d'une autre couleur que le vert.
- 6. Cette pomme est rouge ou verte.

* * *

▶ Éléments de réponse

Les phrases 3 et 4 sont négatives alors que les autres sont affirmatives.

Les phrases 1 et 3(5) sont la négation l'une de l'autre.

Les phrases 3 et 5 ont le même sens.

Les phrases 4 et 6 sont la négation l'une de l'autre.

▶ Remarque

Certaines phrases peuvent se déduire à partir d'autres :

1 implique 6, 2 implique 6, 4 implique 3, 4 implique 5.

Compréhension de phrases

- ▶ Analyser les phrases suivantes, repérer les mots-liens et essayer de trouver d'autres formulations de la phrase qui en gardent le sens.
- ▶ Quelles sont les situations qui contredisent ces phrases ?
 - a) Jean est plus grand que Paul et Paul est plus grand que Pierre, donc Jean est plus grand que Pierre.
 - b) Lorsque Tante Jeanne se rend chez son neveu Tom, Tom sort jouer.
 - c) S'il y a du vent ou s'il pleut, nous ne sortirons pas.
 - d) Cet après-midi, les élèves de 2^e D sont à la piscine ou au basket.
 - e) Un élève réussit de plein droit lorsqu'il a au moins 60 % de moyenne, au moins 60 % en MLF et au moins 50 % dans chacune des autres disciplines.
 - f) Un parallélogramme est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles.

* * *

Les connecteurs logiques

- ▶ et (peut prendre des sens différents)
- ▶ ou (inclusif et/ou ou exclusif "soit..., soit ...")
- ▶ si..., alors ; donc ;

Rôle de la négation : opérer sur une assertion.

Jeux – exercices

1. "Qui est-ce" avec un dé "connecteur à utiliser dans la question"
2. "Club Einstein", "Set", (Pippo, Cluedo)

Petits problèmes de logique

I. Vérifier si les 4 raisonnements suivants sont corrects :

1. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.
2. Les chiens sont des animaux, donc les hommes sont mortels.
3. Les humains sont des chiens donc ils aboient.
4. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.

* * *

(1 et 4 vrais, 2 et 3 faux)

- II. Choisir la ou les bonne(s) réponse(s) parmi les cinq réponses proposées.
- Quand il pleut, le chat est soit dans la cuisine, soit dans la cave.
 - Quand le chat est dans la cuisine, la souris est dans son trou et le fromage est dans le réfrigérateur.
 - Quand le fromage est sur la table et le chat dans la cave, la souris est dans la cuisine.

En ce moment, il pleut et le fromage est sur la table. Alors nécessairement :

A : Le chat est dans la cuisine

B : Le chat est dans la cave

C : La souris est dans la cuisine

D : La souris est dans son trou

E : Une telle situation ne peut pas se produire.

(F. Laroche, Activités 2^{de}, p. 34)

* * *



(Réponse : B et C)

III. Un vol de cargaison a eu lieu, on sait qu'il y a deux coupables et on interroge six suspects.

Alberto : "Caldo est innocent".

Bonno : "Dido est innocent".

Caldo : "Emilio est innocent".

Dido : "Fabrigio" est innocent.

Emilio : "Alberto est innocent".

Sachant que les marins honnêtes disent la vérité, trouver les deux coupables.

(Problème du rallye mathématique de Bruxelles, 2007)

* * *

(Réponse : B et D)

Equivalence et définitions

- ▶ Jeu des définitions
- ▶ Construction d'un lexique comprenant des mots dont le sens varie selon les disciplines, le contexte.

Exemples de termes utilisés en logique :

* * *

ANALYSE

- Décomposition d'une chose en ses éléments, d'un tout en ses parties. Examen permettant d'isoler ou de discerner les différentes parties d'un tout (opposé à synthèse).
- Grammaire : décomposition d'une proposition en ses éléments grammaticaux et caractérisation grammaticale de ses éléments; analyse logique : décomposition de la phrase en propositions et détermination de la fonction de ses propositions.
- Opération de logique consistant à remonter d'une proposition à d'autres propositions reconnues pour vraies d'où on puisse ensuite la déduire.
- Math. Etude de fonctions, d'ensemble et des liens entre des objets mathématiques.
- Informatique : Décomposition d'un problème en ses éléments en vue d'un traitement informatique.

PROPOSITION

- Action de proposer, d'offrir, de suggérer quelque chose à quelqu'un.
- Logique : assertion considérée dans son contenu (proposition vraie, fausse, contradictoire).
- Grammaire : phrase qui participe à la construction d'une phrase complexe (proposition principale, subordonnée, indépendante).

HYPOTHESE

- Proposition reçue, indépendamment de sa valeur de vérité, admise comme donnée d'un problème, et à partir de laquelle on déduit un ensemble donné de propositions.
- Supposition, conjecture par laquelle l'imagination anticipe sur la connaissance pour expliquer ou prévoir la réalisation éventuelle d'un fait, pour déduire des conséquences.

INDUCTION

- Opération mentale qui consiste à remonter des faits à la loi, de cas particuliers à une proposition plus générale (généralisation, inférence).

DEDUCTION

- Raisonnement consistant à appliquer des lois générales à des faits, des cas particuliers (démonstration).

INFERENCE

- Français : opération logique qui consiste à partir d'indices présents dans le texte, à rendre explicite une information qui n'est qu'évoquée ou supposée connue.
- Logique : opération logique par laquelle on admet une proposition en vertu de sa liaison avec d'autres propositions déjà tenues pour vraies.

Règle d'inférence : implication toujours vraie.

Négations

► *Quelles sont les situations qui contredisent ces phrases ?*

- a) *Jean est plus grand que Paul et Paul est plus grand que Pierre, donc Jean est plus grand que Pierre.*
- b) *Lorsque Tante Jeanne se rend chez son neveu Tom, Tom sort jouer.*
- c) *S'il y a du vent ou s'il pleut, nous ne sortirons pas.*
- d) *Cet après-midi, les élèves de 2^e D sont à la piscine ou au basket.*
- e) *Un élève réussit de plein droit lorsqu'il a au moins 60 % de moyenne, au moins 60 % en MLF et au moins 50 % dans chacune des autres disciplines.*
- f) *Un parallélogramme est un quadrilatère possédant deux paires de côtés parallèles.*

* * *

Les quantificateurs

Comparer les phrases suivantes et associer celles qui ont le même sens :

1. Des élèves sont absents.
2. Les élèves sont absents.
3. Au moins trois élèves sont absents.
4. Il n'y a pas plus de 5 élèves absents.
5. Certains élèves sont absents.
6. Quelques élèves sont absents.
7. Tous les élèves sont absents.
8. Un élève est absent.
9. Un élève exactement est absent.

* * *

Nouveau problème

- ▶ Gaël écrit à Gaston : "Dans le port de Logique, il y a au moins 100 bateaux. Si un voilier a un seul mat, alors il a une coque blanche. Deux chalutiers sont en réparation. Aucun chalutier rouge ne pêche la sardine ni le maquereau."

Gaston peut en déduire que dans le port de Logique :

- a. Il pouvait y avoir un voilier ayant deux mâts.
- b. Tous les voiliers ayant une coque blanche avaient un seul mât.
- c. Aucun voilier n'était en réparation.
- d. Si un chalutier pêchait la sardine, alors il n'était pas rouge.
- e. Si un chalutier pêchait le bar, alors il était rouge.

(F. Laroche, Activités 2^{de}, p. 34)

Chronologie et inférence

▶ Exemple I : Problème mathématique

"Pierre veut passer une couche de peinture sur deux murs de 11,5 m² chacun et sur deux murs de 7,5 m² chacun. Avec un pot de peinture, on peut couvrir 8 m² au maximum. Combien de pots Pierre doit-il acheter ?"

Voici une "solution" correcte, à replacer dans le bon ordre.

1. Pierre en achètera donc 5,
2. car $38 : 8 = 4,75$.
3. car $(11,5 \times 2) + (7,5 \times 2) = 38$;
4. puisqu'on doit acheter un nombre entier de pots.
5. L'aire totale de la surface à peindre est 38 m²
6. il faut au moins quatre pots de peinture.

* * *

Problème extrait de "52 outils pour un travail commun au collège"
(Duvert et Zakartchouk)

Réponse de l'exemple 1 : 5 - 3 - 6 - 2 - 1 - 4

▶ Exemple 2 : Conte dont il faut rétablir l'ordre logique.

1. si tu fais exactement ce que je te dirai.
2. Soudain le petit lutin qu'il avait autrefois secouru surgit devant Pierre.
3. Il se rendit vite compte que ce serait impossible, bien sûr.
4. Pierre commença dès la tombée du jour avec espoir
5. Prends ton pot de peinture et en route !"
6. Il se mit à pleurer à chaudes larmes.
7. car il était tellement amoureux de la Princesse...
8. "Tu pourras réussir cet exploit
9. Pierre se mit au travail avec une énergie nouvelle.
10. La Princesse déclara qu'elle épouserait celui qui serait capable en une nuit de repeindre tous les murs des maisons du royaume.

* * *

Problème extrait de "52 outils pour un travail commun au collège"
(Duvert et Zakartchouk)



Place de la négation et sens des phrases

Expliquer la différence si elle existe entre les deux phrases proposées :

1. a) Je te demande de ne pas faire cela
b) Je ne te demande pas de faire cela
2. a) Est-il vrai que les nombres qui sont entiers peuvent ne pas s'écrire avec une virgule ?
b) Est-il vrai que les nombres qui ne sont pas entiers peuvent s'écrire avec une virgule ?
3. a) Ce travail n'est vraiment pas réussi
b) Ce travail n'est pas vraiment réussi
4. a) Je dis que vous n'avez pas tort...
b) Je ne dis pas que vous avez tort...
5. a) Elle accuse toujours sans avoir de preuves.
b) Elle accuse sans toujours avoir de preuves.

* * *

Problème extrait de "52 outils pour un travail commun au collège"
(Duvert et Zakartchouk)

Connecteurs à ajouter

Transformer les paires de phrases suivantes en une seule, à l'aide d'un des mots ou expressions de la liste suivante :

car / comme / donc / étant donné que / parce que / puisque / par conséquent

1. a) Anvers est en Belgique
b) Anvers est une ville d'Europe
2. a) GHAF a quatre angles droits
b) GHAF est un carré
3. a) Les dauphins ont des vertèbres
b) Les dauphins sont des mammifères
4. a) Elle a des épines
b) C'est une rose
5. a) Les droites d et d' se coupent en un seul point.
b) Les droites d et d' sont perpendiculaires

* * *

Problème extrait de "52 outils pour un travail commun au collège"
(Duvert et Zakartchouk)

Informations et résolution de problèmes

Pour chaque question, deux informations sont proposées.

Quelles sont celles qui sont suffisantes pour répondre à la question ?

1. Quel âge a ma sœur Nelly sachant que mon frère Pascal a 5 ans ?
(1) Nelly a 3 ans de moins que moi.
(2) J'ai 6 ans de plus que Pascal.
2. Lequel de Stéphane ou de Maxime a obtenu le meilleur classement au concours AVENIR ?
(1) : Paul est moins bien classé que Maxime.
(2) : Stéphane est mieux classé que Paul.
3. Hervé est allé au concert. Olivier est-il allé au concert ?
(1) : Quand Alexandre ne va pas au concert, alors Olivier ne va pas au concert.
(2) : Quand Hervé va au concert, alors Alexandre va au concert.
4. Qui de Léa ou de Paul a obtenu le meilleur classement au concours AVENIR ?
(1) : Léa est moins bien classée que Solène.
(2) : Paul est mieux classé que Solène.

(Exercice issu de "Math Activités 1^{ère}", F. Laroche, Ed Ellipses, 2011, pp. 229-232)

* * *

Exercices de synthèse

I. Une langue imaginaire ("EAD, module "Comment apprends-tu ?") :

On écrit 2 fois toutes les voyelles sauf quand 2 voyelles différentes se suivent.

Les consonnes sont doublées uniquement quand elles commencent ou terminent un mot.

On n'emploie jamais les consonnes b, c, f.

Quels sont les mots écrits correctement ?

- | | | | |
|--------------|--------------|-------------|--------------|
| a) ddiinoo | b) ddiinnoo | c) ddiino | d) dino |
| e) ttigrou | f) tigrrou | g) ttigrrou | h) wizaarr |
| i) ttoolaann | j) ttoblaann | k) ttoaann | l) ddraagoon |

* * *

Réponses : a, i, l

Autres exercices en prolongement :

2. Faire reproduire un dessin à l'aide de consignes.
3. Comprendre / écrire les règles d'un jeu

Enigmes de Martin Gardner

1. Un crocodile qui dit à une maman "Vais-je manger ton bébé ? Réponds sans mentir et je te le rendrai sain et sauf". Que doit répondre la maman pour sauver son bébé ?
2. "Si Sara ne veut pas, Wanda veut". Il est impossible que les deux propositions "Sara veut" et "Camille ne peut pas" soient vérifiées en même temps. Si Wanda veut, Sara veut et Camille peut. Il en résulte que Camille peut. Cette conclusion est-elle juste ?
3. "La semaine passée, j'ai éteint la lumière dans ma chambre à coucher et réussi à atteindre le lit avant que la chambre ne devienne sombre. Le lit est à 3 mètres de l'interrupteur : comment ai-je fait ?"
4. "Chaque fois que ma tante vient me rendre visite, elle quitte l'ascenseur cinq étages trop bas et monte le reste à pied. Pouvez-vous me dire pourquoi ?"

* * *

-
5. "Un soir, mon oncle lisait un livre passionnant lorsque sa femme éteignit la lumière. Quoique dans la pièce il fît nuit noire, il continua à lire. Comment a-t-il pu faire ?"
 6. "Sur la Voie Express, un homme conduisait, son jeune fils était assis à sa droite. Soudain, la voiture dérapa et s'écrasa contre la culée d'un pont. Le père ne fut pas blessé, mais le garçon souffrait d'une jambe cassée. Une ambulance les conduisit à un hôpital proche. Le chirurgien allait opérer quand il s'écria : "Je ne peux pas opérer ce garçon. C'est mon fils !" Comment cela se peut-il ?"
 7. "Une dame avait oublié son permis de conduire. Elle franchit un passage à niveau fermé, s'engagea ensuite dans un sens interdit et l'emprunta pendant trois pâtés de maisons. Un agent de police qui avait tout observé ne l'arrêta pas. Pourquoi ?"

* * *

Réponses :

1. "Tu vas manger mon bébé"
2. Oui
3. Il faisait jour
4. La tante est naine et ne peut pas atteindre de bouton situé plus haut
5. L'oncle était aveugle et lisait en braille.
6. Le chirurgien était la mère du garçon.
7. La dame marchait et n'était donc pas en voiture.

Réponses :

1. Basile, Chris et Dan ont dit la vérité, sinon il y avait au moins deux menteurs. Albert a donc menti.
2. Si Nanard dit vrai, Dodo aussi, alors qu'un seul dit vrai. Donc Nanard ment, et Armand aussi. Dodo dit vrai et a frappé la victime.
3. Elise et Clarisse se contredisent, donc elles mentent et Alain et Daniel disent la vérité. Ben peut dire la vérité ou mentir.
4. Les chiffres effacés sont dans l'ordre : 3, 2 et 1 (1 et 4 ont même valeur de vérité, 2 et 3 ont même valeur de vérité).
5. Les phrases 3 et 6 sont vraies et les autres fausses.

Suggestions pour aller plus loin

- ▶ Revues Logigrammes (plusieurs niveaux) pour travailler énoncés et déductions.
- ▶ Championnats des jeux mathématiques et logiques (www.ffjm.be) pour travailler les énoncés plutôt mathématiques.
- ▶ Jeux logiques (www.jeuxmathematiquesbruxelles.be) pour travailler le raisonnement logique sous une forme ludique (Pippo, Qui est-ce, Cluedo, Club Einstein, .).

Références et remarques sur ce module

- ▶ R. DUVERT et J.M. ZAKARTCHOUK, "*52 outils pour un travail commun au collège*", CDRP Amiens, 1998
- ▶ F. Laroche, "*Math Activités 2^{de} et 1^{ère}*", Ed Ellipses, 2011
- ▶ Cours M.-Cl. Hoebanx, J. Lamon et M. Malfait (Catégorie pédagogique)
- ▶ Revue La Recherche, Hors série "*Jeux*", juillet 2012
- ▶ Hors série tangente Education n°20 "*100 jeux mathématiques et culturels*", mai 2012
- ▶ Enigmes de Martin Gardner reprises du site www.jeuxmathematiquesbruxelles.be

- ▶ contact : joelle.lamon@yahoo.fr