GRAPHES

Sommaire

1. Introduction

Depuis le problème des ponts de Königsberg et le jeu icosien, la théorie des graphes s'est particulièrement développée en raison du nombre élevé de problèmes qu'elle permet de résoudre. Nous vous en proposerons quelques-uns, présentés sous forme de défis accessibles dès l'école primaire et testés lors d'animations en Belgique et en France. Ils sont le fruit des diverses collaborations de cette année 2014, entre autres avec le Comité International des Jeux Mathématiques, mais aussi du travail des étudiants futurs enseignants et collègues de la Haute Ecole Francisco Ferrer.

Ces défis successifs travailleront les compétences suivantes :

Compétences transversales :

- *Se poser des questions*
- *Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, solides)*
- *Présenter des stratégies qui conduisent à une solution.*
- *Créer des liens entre des faits ou des situations*
- *Construire une formule, une règle, schématiser une démarche, c'est-à-dire ordonner une suite d'opérations, construire un organigramme*
- *Procéder à des variations pour en analyse les effets sur la résolution ou le résultat et dégager la permanence de liens logiques.*

Compétences disciplinaires :

- *Se situer et situer des objets.*
- *Dans le domaine des solides et des figures, représenter, sur un plan, le déplacement correspondant à des consignes données.*
- *Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.*

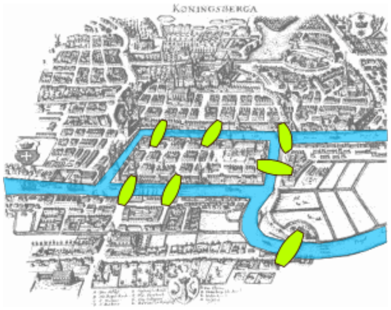
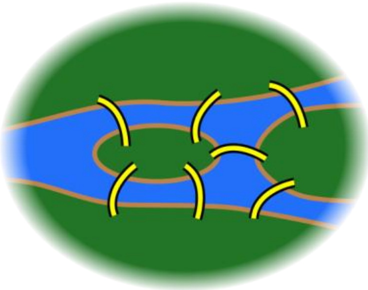
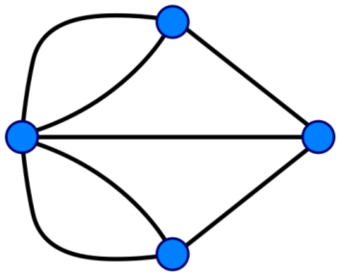
2. Euler et les ponts de Königsberg[1].

Introduction :

- *fiche défi « Chemins et circuits eulériens ».*
- *tablette : application « Drawesome » « One T draw »*

Chemins et circuits eulériens :

Le mathématicien suisse Leonhard Euler a présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1735 (puis publié en 1741) le problème des sept ponts de Königsberg. Ce problème consistait à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg située alors en Prusse, connue aujourd'hui sous le nom de Kaliningrad en Russie.

Euler a résolu le problème en modélisant le problème à l'aide d'un graphe, ensemble de sommets reliés entre eux par une ou plusieurs arêtes. Les ponts sont représentés par des arêtes et les parties de la ville par des sommets. Un graphe est donc une sorte de squelette abstrait.
Un chemin passant par toute arête exactement une fois est nommé chemin eulérien, ou circuit eulérien s'il finit là où il a commencé. Par extension, un graphe admettant un chemin eulérien est dit *graphe eulérien*.
Remarquons que ceci n'est possible que si le graphe est connexe, c'est-à-dire s'il existe toujours un ensemble d'arêtes permettant d'aller d'un sommet à un autre ou chemin.

Propriété :
Euler avait formulé qu'un circuit n'est eulérien que si par chaque sommet passe un nombre pair d'arêtes. L'usage est de s'y référer comme *théorème d'Euler*, bien que la preuve n'y ait été apportée que 130 ans plus tard par le mathématicien allemand Carl Hierholzer. La condition nécessaire est facile : on doit arriver en chaque sommet autant de fois qu'on en part.
Dans un graphe eulérien, si un sommet possède un nombre impair d'arêtes, alors ce sommet est le point de départ ou d'arrivée, puisqu'on ne peut en partir autant de fois qu'on en part.
Dans l'autre sens, on construit des circuits de plus en plus grands, en ajoutant chaque fois un sommet, pour arriver au circuit eulérien. Le nombre d'arêtes ajoutées est pair.

Utilisations des graphes :

Lors d'un tournoi, les équipes en compétition directe peuvent se représenter comme des sommets reliés par une arête (ou sommets adjacents), ce qui permet de visualiser l'ensemble des compétitions du tournoi.
Un graphe orienté (en remplaçant les arêtes par des flèches) permettra de préciser les gagnants et perdants, et d'organiser une hiérarchie permettant un classement.
Un circuit électrique peut se voir comme un graphe, dans lequel les sommets sont les nœuds du circuit, et les arêtes correspondent aux connexions physiques entre ces nœuds. Pour modéliser les courants traversant le circuit, on considère que chaque arête peut être traversée par un *flot*. Comme stipulé par la loi des nœuds, le

[1] Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_graphes

flot à un sommet est conservé, ou identique à l'entrée comme à la sortie ; par exemple, l'eau qui entre dans un canal ne disparaît pas et le canal n'en fabrique pas, donc il y a autant d'eau en sortie qu'en entrée.
Les jeux où il faut dessiner une figure sans lever le crayon se rapprochent aussi de ce type de graphe.

Prolongement :
A un graphe peut être associé une matrice carrée constituée de 1 et de 0 appelée matrice d'adjacence, selon que les sommets sont reliés ou non par une arête. A partir de là, il sera possible d'examiner les sommets accessibles en un nombre déterminé d'arêtes et le nombre de chemins possibles.

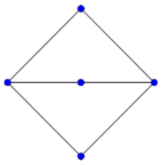
3. Hamilton et le jeu d'icosie

Introduction :

Voir fiche défi « Chemins et circuits hamiltoniens ».

Circuit hamiltonien

On appelle circuit Hamiltonien un circuit (ou cycle) passant une fois et une seule par tous les sommets d'un graphe. Cette appellation vient d'un jeu proposé par Sir William Hamilton en 1859 : un voyageur veut visiter 20 villes aux sommets d'un dodécaèdre en passant une fois et une seule par chaque ville et en revenant à son point de départ.



Ceci n'est pas possible sur chaque graphe, ci-contre le plus petit contrexemple, constitué de 5 sommets et 6 arêtes.

Il est possible de se limiter aux graphes simples, c'est-à-dire sans boucle et sans arête double, puisque ces éléments ne changent rien au problème.

On ne connaît actuellement pas de condition générale nécessaire et suffisante pour avoir un graphe hamiltonien, bien que quelques conditions soient connues. Ce problème est dit NP-complet[2].

Quelques résultats[3]

Une condition nécessaire est par exemple qu'entre deux sommets quelconques existe toujours un chemin (c'est-à-dire que le graphe soit fortement connexe).

Si le degré tout sommet est supérieur ou égal à la moitié du nombre de sommets, alors le graphe est hamiltonien (critère de Dirac).

Un graphe simple à n sommets ($n \geq 3$) tel que la somme des degrés de toute paire de sommets non adjacents vaut au moins n est hamiltonien (Théorème de Ore).
Si, dans un graphe fortement connexe sans boucle, toute paire de sommets

[2] En théorie de la complexité, un problème NP-complet (c'est-à-dire un problème complet pour la classe NP) est un problème de décision vérifiant les propriétés suivantes : 1°) Il est possible de vérifier une solution efficacement (en temps polynomial) ; la classe des problèmes vérifiant cette propriété est notée NP ; 2°) Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale ; cela signifie que le problème est au moins aussi difficile que tous les autres problèmes de la classe NP.Bien qu'on puisse vérifier rapidement toute solution proposée d'un problème NP-complet, on ne sait pas en trouver efficacement. (Source : Wikipedia)
[3] Démonstration : voir site http://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_hamiltonien

non reliés par une arête est telle que la somme des degrés des deux sommets est supérieure ou égale à 2n+1, n étant le nombre de sommets du graphe, ce dernier contient un circuit hamiltonien (Théorème de Meyniel).

Applications

Jeu icosien en ligne : http://neamar.fr/Res/Icosien/ ;
Explications mathématiques sur le jeu : http://naturelovesmath.blogspot.be/2010/12/icosien-jeu-theorie-des-graphes.html

Les canaux de Mars (LOYD, 1-64)

Voici une carte des villes et canaux récemment découverts sur la planète voisine : Mars. Commencez à la ville marquée C près du pôle sud et voyez si vous pouvez épeler une phrase complète en passant par toutes les villes une fois et une fois seulement et en revenant au point de départ.

Quand ce problème parut dans un journal, plus de cinquante mille lecteurs écrivirent : "Cela ne peut pas se faire", et pourtant ce problème est simple !

4. Couplages et graphes planaires

Introduction :

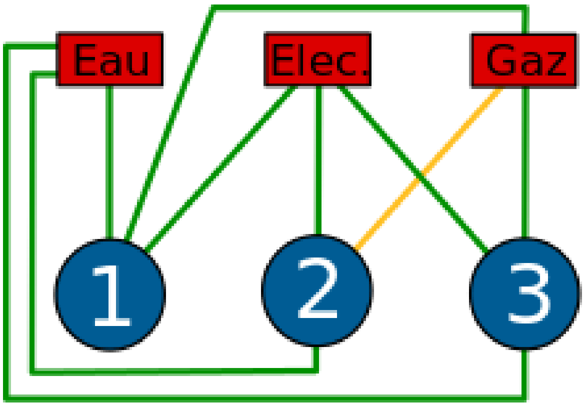
- *fiches défi « Couplages ».*
- *tablette : application « Flow free »*
- *jeu « planarity » : (en ligne sur le site www.planarity.net), développé par John Tantalo : il s'agit de démêler un graphe pour qu'il devienne planaire, c'est-à-dire que ses arêtes ne se coupent jamais entre elles.*

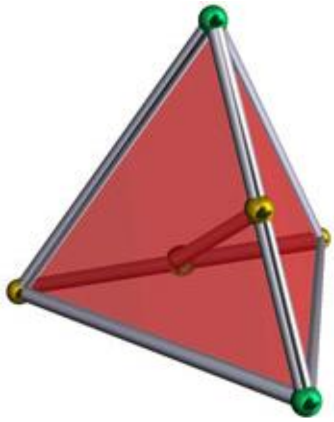
Graphes planaires et couplages :

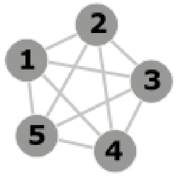
Un graphe présenté sans arêtes sécantes est beaucoup plus clair. Dans certaines situations, comme le plan d'un réseau électrique, les fils ne peuvent se couper et cette propriété est indispensable. Ce type de graphe est dit *graphe planaire* : les arêtes ne peuvent se rencontrer qu'en un sommet.

Un couplage consiste à lier un maximum de paires de sommets d'un graphe sous certaines conditions. Souvent, les graphes considérés seront bi-partis : ils sont constitués de deux sous-ensembles disjoints et chaque arête relie un sommet s'un sous-ensemble à un sommet de l'autre sous-ensemble.

Un problème à l'origine de la notion de graphe planaire est l'énigme des trois maisons, appelée aussi «jeu des trois maisons et des trois puits » ou « énigme de l'eau, du gaz et de l'électricité. Il s'agit de relier trois maisons à trois accès. Ce problème n'a pas de solution dans le plan mais bien dans l'espace (maisons en vert et accès en jaune). Il est repris par Georges Perec en 1978 dans son livre « Je me souviens ».
Les graphes tels que chaque paire de sommets est reliée par une arête sont dits complets.







Ce type de problème n'est pas possible si le graphe comporte une partie du type $K_{3,3}$ (3 sommets à relier à 3 autres, graphe biparti complet à 3+3 sommets) ou K_5 (5 sommets où chacun doit être relié à tous les autres, graphe complet à 5 sommets) ou s'y réduit en contractant certaines arêtes. Ce résultat a été trouvé par Kuratowski et est lié au problème de coloriage de cartes avec un minimum de couleurs qui sera vu plus loin.

Remarquons que les résultats sont différents si la surface considérée est celle d'une sphère ou d'un tore.

Une application originale des graphes planaires se rencontre en architecture avec les contraintes de communication entre pièces.

La représentation des circuits électriques nécessite également l'utilisation de graphes planaires.

5. Formule d'Euler

Introduction :

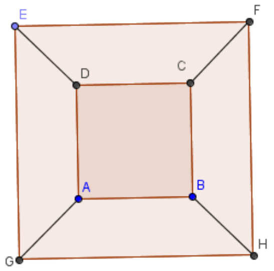
Sur plusieurs solides, compter le nombre de sommets, d'arêtes et de faces. Comparer les nombres pour dégager une formule : la formule d'Euler (Matériel : polydrons ou zometool)
Solides proposés : polyèdres réguliers, pyramide, prisme, polyèdre non convexe

Formule d'Euler

Si f désigne le nombre de faces du graphe, s son nombre de sommets et a le nombre d'arêtes, la formule d'Euler affirme que, pour un graphe planaire connexe non vide: $s - a + f = 2$ DEMO !!!
La formule d'Euler s'applique aux graphes polygonaux, c'est-à-dire aux graphes connexes, planaires, et tels que toute arête joigne deux sommets distincts et soit au bord de deux faces distinctes.
En particulier, elle s'applique aux polyèdres convexes classiques vus à l'école primaire : prismes, pyramides, polyèdres réguliers, qui peuvent se représenter sous la forme de graphes polygonaux, en n'oubliant pas la face externe, grâce à la représentation de Schlegel.

Diagramme de Schlegel

Lorsqu'on « projette » le squelette d'un polyèdre sur une de ses faces, on obtient un diagramme de Schlegel.
Sur ce diagramme, la formule d'Euler n'est plus respectée, puisqu'une face est « enlevée », sauf si on considère qu'une face est située à l'extérieur du diagramme.



Prolongements :

Cette formule ne peut s'appliquer au problème des trois maisons (6 sommets et 9 arêtes, K_3), un tel graphe n'étant pas polygonal. Il en est de même pour K_5 (5 sommets, 10 arêtes).

Il est possible, à l'aide de la formule d'Euler, de retrouver les 5 polyèdres réguliers convexes.
Si on appelle n le nombre d'arêtes d'une face et p le nombre d'arêtes passant par un sommet, on a d'une part $2a = nf$ et d'autre part $2a = ps$. La formule d'Euler devient : $2a/p + 2a/n – a = 2$ ou $a(2n + 2p – np) = 2np$.
Le terme entre parenthèses étant positif, on en déduit que $(n-2)(p-2) – 4 < 0$ ou $(n – 2) (p – 2) < 4$.
De plus, n vaut au moins 3 (une face a au moins 3 arêtes) et p vaut au moins 3 (si p = 2, on a un polygone régulier).
Les cinq solutions correspondent aux cinq polyèdres réguliers convexes :

- n = 3, p = 3 donne le tétraèdre régulier,
- n = 4, p = 3 donne le cube,
- n = 3, p = 4 donne l'octaèdre régulier,
- n = 5, p = 3 donne le dodécaèdre régulier,
- n = 3, p = 5 donne l'icosaèdre régulier.

On peut aussi se poser la question de savoir ce que devient la formule dans le cas d'autres surfaces : le tore, le cylindre, le ruban de Möbius, la bouteille de Klein, …

6. Distances et graphes

Introduction :

Déterminer la distance maximale entre deux sommets sur plusieurs polyèdres, celle-ci étant calculée en comptant le nombre d'arêtes les séparant.

Distance sur un graphe

La distance entre deux sommets d'un graphe connexe (ou entre 2 sommets d'une même composante connexe d'un graphe non connexe) est le nombre minimum d'arêtes (on dit aussi la longueur) d'une chaîne allant de l'un à l'autre.

Applications :

Dans une ville, les points A, B, C et D représentent des immeubles et les arêtes des rues ou boulevards reliant lesdits immeubles. La pondération représente alors la distance dans l'unité choisie séparant deux immeubles. On l'appelle taxidistance.

Les graphes sont utilisés pour corriger des erreurs en remplaçant des « mots » erronés par le mot du dictionnaire le plus proche.

Divers réseaux utilisent la notion de distance : parcours en transport en commun avec le moins de tronçons (ou arêtes) possible, nombre de personnes reliées plus ou moins directement sur les réseaux sociaux, …

Le déplacement automatique des personnages dans un jeu vidéo utilise également cette notion.

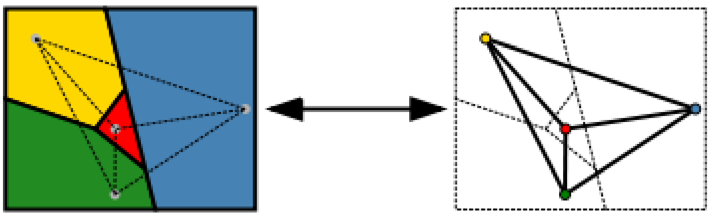
Voici un réseau imaginaire, basé sur la distance entre les mots, extrait de l’exposition « Arts et maths » proposée à l’ULB en 2013.

7. Coloriages de cartes

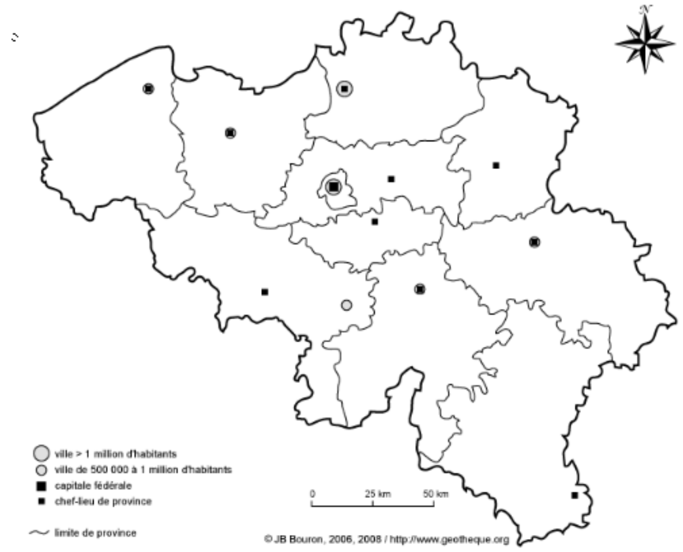
Introduction :

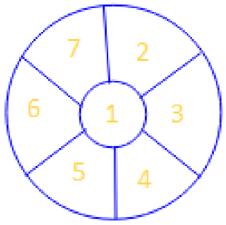
Voir fiche défis

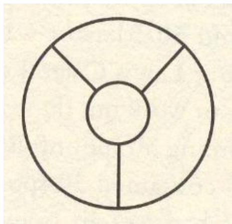
Un problème célèbre en théorie des graphes est celui de la *coloration de graphe.* On veut déterminer combien de couleurs différentes suffisent pour colorer entièrement un graphe de telle façon qu'aucun sommet n'ait la même couleur que ses voisins. Une autre approche consiste à colorier une carte de telle façon qu’aucun « pays » n'ait la même couleur que ses voisins, problème dual du précédent (on a remplacé les sommets par des faces, et les arêtes jouent le rôle de frontières).



Exemples :







Méthode :

Procédé utilisé pour colorier la carte de Belgique :

- Repérer la province qui est entourée par le plus de provinces belges (limitrophes)
- Schématiser la situation et utiliser la même couleur pour les zones opposées qui ne se touchent pas
- Déterminer le nombre de couleurs à utiliser en les comptant.

Application à la carte circulaire :
2 et 5 peuvent être de la même couleur, 3 et 6 aussi, 4 et 7 également.
Le nombre maximum de couleurs nécessaires est 4.

Généralisation :
Si nous avons en tout un nombre impair de zones, le nombre de couleurs maximum est 3.
Par contre, si nous avons un nombre pair de zones, le nombre de couleurs maximum est 4.

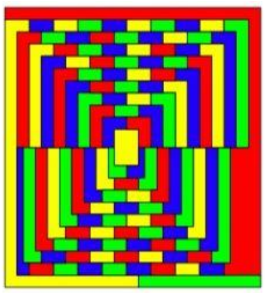
Résultats

En 1852, le mathématicien sud-africain Francis Guthrie énonça le problème des quatre couleurs, en demandant si toute carte peut être coloriée avec maximum quatre couleurs de façon à ce que des pays voisins aient des couleurs différentes. Ceci donna lieu à un grand développement de la théorie des graphes : le problème n'a été résolu qu'en 1976 par deux Américains (Kenneth Appel et Wolfgang Haken), et avec l'aide d'ordinateurs, en travaillant avec des cartes dualisées (les faces sont remplacées par des sommets).
Le plus petit nombre de couleurs permettant de colorer un graphe (faces ou sommets) est appelé nombre chromatique.

Applications

Jeux :

- Jeu *Snort*
- Pavages
- Carte de Martin Gardner (ci-contre)



Il est aussi possible de construire des horaires avec ce procédé, en colorant différemment des heures non compatibles, ou d'organiser des tournois

8. Graphes et contraintes

A partir des graphes, il est possible de se poser un grand nombre de questions : en voici quelques-unes, sous forme de jeux : 36 cube, Solitair chess, Zalogo.

Le jeu 36 cube permet d'aborder de façon ludique le problème des 36 officiers proposé par Euler en 1782 : il faut placer 36 officiers de 6 régiments et six grades tous différents dans un carré 6x6 de telle sorte que deux grades ou régiments identiques ne soient jamais situés sur une même ligne ou colonne. Dans le jeu proposé, une astuce permet de résoudre ce problème impossible[4].

Voici l'un des casse-têtes proposé par Martin Gardner : sur un damier 4x4, 2 pions noirs sont placés sur les cases blanches du dessus, deux pions blancs sur les cases blanches du dessous. L'objectif est d'échanger les pions blancs et noirs en un minimum de coups. (La réponse est cinq).

Sam Loyd propose plusieurs problèmes sur l'échiquier, dont le parcours de toutes les cases par un cavalier, mais aussi l'échange de place de deux cavaliers, resté célèbre parce qu'il utilise des formats d'échiquiers originaux pour y arriver.

En ce qui concerne les échecs, Gardner s'intéresse au problème des reines et des cavaliers à placer sur un échiquier sans être en prise, et reprend les apports de ses contemporains. Par exemple, placer huit reines (5 noires, 3 blanches) non en prise.

<u>Autres défis :</u>

1. A l'aide des nombres 1, 2, 3, 4, écrire les n premiers naturels en essayant d'aller le plus loin possible
2. Quatre 4 pour former un nombre[5]
   Former tous les nombres, les uns après les autres, en utilisant quatre fois le chiffre 4 mis en action au sein des seules opérations classiques. (Variantes : utiliser 1, 2 chiffres quatre)
3. Ecrire 100 avec les chiffres de 1 à 9
   a) dans l'ordre croissant,
   b) dans l'ordre décroissant
   c) avec 5 chiffres identiques uniquement.
4. Faire un total de 12 en utilisant le même nombre cinq fois.
5. Faire 6 en utilisant le même nombre trois fois.
6. Trouver tous les graphes connexes que l'on peut construire à partir de n points[6].
7. Construire des « polyèdres de paix ».
8. Construire des entrelacs sur un graphe.

En littérature, Claude Berge (1926 – 2002, français) est à l'origine, avec Georges Perec, Raymond Queneau et François le Lyonnais, de l'Oulipo = Ouvroir de littérature potentielle, conciliant littérature et mathématique dans la recherche de productions littéraires soumises à des contraintes formelles.

---

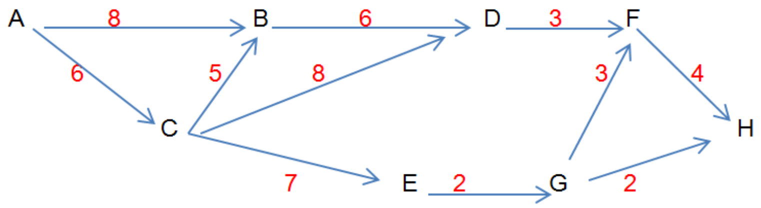
[4] Pour en savoir plus, voir l'article « Les 36 officiers d'Euler » de Michel Sebille, revue Losanges n° 25, juin 2014.
[5] http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Formes/Quatre4.htm
[6] 1 seul graphe pour n = 1 et pour n = 2, 2 graphes pour n = 3, 6 pour n = 4, 21 pour n = 5, 112 pour n = 6, 853 pour n = 7, …,

9. Organisation temporelle

Exemple :
Préparer trois steaks grillés le plus vite possible sur un grill (à une face) qui ne peut en faire cuire que deux à la fois et met 3 minutes pour cuire une face. Il en existe plusieurs variantes : pain grillé et beurré, tâches ménagères, …[7]

Ce type de problème fait appel à des graphes orientés. Des algorithmes tels que celui de PERT (Program Evaluation and Review Technique, 1957) permettent de trouver le chemin critique, chemin le plus long entre le début et la fin d'un ensemble de tâches ou projet.

L'algorithme de Dijkstra consiste à partir d'un point de départ D et à calculer de proche en proche les plus courts chemins allant de A aux autres points.



Dans l'exemple proposé, le chemin critique (PERT) a une longueur de 24 alors que le chemin le plus court (Dijkstra) a une longueur de 17.

Applications :

- graphes d'hybridation, graphes de parenté pour la notion de graphe orienté
- recherche opérationnelle : gestion des stocks, administration, cuisine, projets
- réseaux routiers et calcul de trajet optimal et de temps de parcours

Les couplages interviennent aussi dans les problèmes d'affectation : par exemple, on cherche à affecter de façon optimale des tâches à des personnes en fonction de leurs compétences. Ces problèmes se résolvent en utilisant des algorithmes.

Prolongement : graphe probabiliste, pouvant décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans plusieurs états, la transition entre les états pouvant s'exprimer par une matrice de transition.

(Problème de Monty Hall : un arbre de probabilités montre que sans changement, les probabilités restent égales à 1/3, et avec changement, la probabilité d'ouvrir la porte donnant sur la voiture est de 2/3, il faut donc changer).

Réponse aux défis :

Réponse au problème n° 1
Méthode : Etablir de proche en proche la distance minimale entre Aoste et chaque ville, jusqu'à arriver à Florence. (Algorithme de Dijkstra)
Solution : Le trajet le plus court entre Aoste et Florence est A-M-P-B-F (Aoste - Milan - Parme - Bologne - Florence). Sa longueur est 502 km.

Réponse au problème n° 2
Solution : Le trajet le plus moins onéreux est Dunkerque - Lille - Nancy - Besançon. Son coût est de 118 €.

[7] Solution : 9 minutes, en grillant le steak A1 et B1, puis en grillant l'autre face A2 et CI, et enfin B2 et C2 (GARDNER M., "*Haha ou l'éclair de la compréhension mathématique",* Pour la Science, Belin, 1979, p. 27)

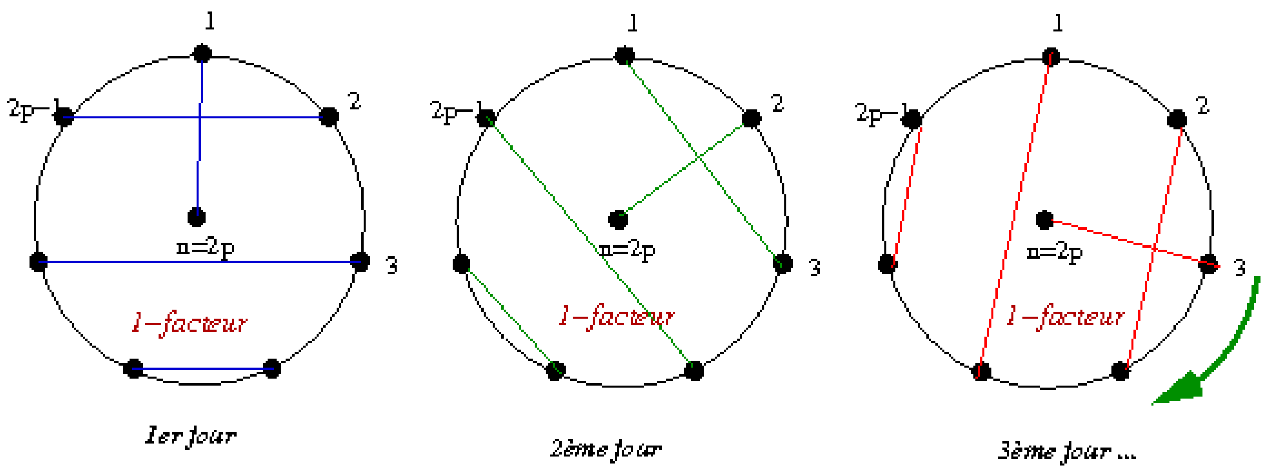
Problème du barbecue : Zoé – entrée, Yann – desserts, Xavier – boissons, Ursule – pommes de terre , Tristan – légumes, Suzy – viandes (coût : 17 €)

Problème du voyage scolaire : 5A Berlin, 5B Salzbourg, 5C Florence, 6A Dublin, 6B Madrid, 6C Copenhague (somme des souhaits : 48 pour un maximum de 60)

10. Affectation et graphes pondérés

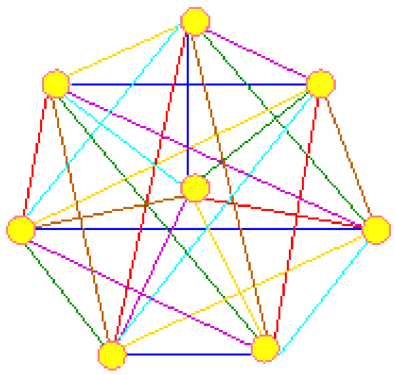
Reprenons le problème des demoiselles de Lucas.

Solution générale, ici pour n = 8



Partition du graphe complet en n−1 sous−graphes de p=n/2 aretes

Résolution « chromatique »



L'indice chromatique d'un multigraphe sans boucles est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes, sachant que deux arêtes adjacentes (arêtes qui ont un sommet commun) ne peuvent être de même couleur.
Le problème des demoiselles se ramène à la recherche de l'indice chromatique d'un graphe complet K_{2n} de n = 2p sommets.
Sur le double schéma (plus haut) les arêtes du 1er jour sont bleues, celle du 2ème jour sont vertes ... En utilisant n-1 couleurs et en superposant les n-1 cercles, on obtient bien un graphe complet et deux arêtes adjacentes de ce graphe ne sont jamais de la même couleur.

Problème des demoiselles de Kirkman

Première partie de la solution : recherche du nombre de jours
Le nombre de paires de deux filles est de 15*14/2 = 105, or chaque groupe XYZ de trois filles correspond à trois paires XY YZ XZ, le nombre total de groupes distincts nécessaires, en supposant que le problème ait une solution, est donc de 105/3 = 35 (à choisir parmi les 15*14*13/6 = 35*13 =455 sous-ensembles possibles de trois filles).

Or chaque jour les 15 demoiselles sont réparties en 5 groupes de trois, il faudra donc une semaine entière pour réaliser les 35 = 7*5 groupes.

Deuxième partie de la solution : énumération

Jour 1	(1, 6, 11)	(2, 7, 12)	(3, 8, 13)	(4, 9, 14)	(5, 10, 15)
Jour 2	(1, 2, 5)	(3, 4, 7)	(8, 9, 12)	(10, 11, 14)	(13, 15, 6)
Jour 3	(2, 3, 6)	(4, 5, 8)	(9, 10, 13)	(11, 12, 15)	(14, 1, 7)
Jour 4	(5, 6, 9)	(7, 8, 11)	(12, 13, 1)	(14, 15, 3)	(2, 4, 10)
Jour 5	(3, 5, 11)	(4, 6, 12)	(7, 9, 15)	(8, 10, 1)	(13, 14, 2)
Jour 6	(5, 7, 13)	(6, 8, 14)	(9, 11, 2)	(10, 12, 3)	(15 ,1, 4)
Jour 7	(11, 13, 4)	(12, 14, 5)	(15, 2, 8)	(1, 3, 9)	(6, 7, 10)

11. Prolongements possibles

Evolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans plusieurs états.

Analyse de jeux se déroulant sur un graphe et recherche de stratégie gagnante (type morpion et mérelles, puissance 4, Magix 34, Hex, Fer à cheval, …)

Jeux et civilisations, jeux d'alignement. Ces jeux se retrouvent un peu partout dans le monde : France (*jeu militaire*, *Tonkin*, *Assaut*), Angleterre (*Halma* et son prolongement les dames chinoises, appelé ainsi en raison de son succès en Chine), jeux de merelle et moulin un peu partout en Europe, Japon (*Hashami-Shogi*, jeu proche du moulin), *Nyout* en Corée et dans une grande partie de l'Asie, *Senet* en Egypte, *Renard et poules* en Islande, *Tablut* en Laponie, *Léopards* au Sri Lanka, *Tigre* au Sri Lanka et en Inde, et sa variante *Bagha-Chalou* au Népal, *Pettie* en Grèce Antique, et sa variante africaine *Seega*, …

Modélisation de jeux (de cartes par exemple) par des graphes (Gardner)

Problèmes d'échanges de pions de deux couleurs données en un minimum de coups, problèmes d'échange de cavaliers, problèmes d'allumage de lampes, jeu de pions de Conway et Lewthwaite, …

Recherche de déplacements avec contraintes (jeux Athena, Embouteillages, âne rouge, …)

Hiérarchie, classements et votes

Problèmes de trajets comportant le moins de changements de direction possible (Sam Loyd, « En Grèce Antique » (1 – 7), « Tactique militaire » (1 – 29), « A l'abordage » (1 – 42))

Enigmes où apparaissent des graphes.

Jeux plus généraux se déroulant sur un plateau de jeu qui est un graphe : *Jeu stratégique de la prise des villes* (France, 1875), jeu de la guerre (France, 1914), *Les aventuriers du rail*, *Scotland Yard*, *Barricade*, *Funkenschlag*, …

12. Jeux et graphes

Jeux proposés :

- Chemins : River crossing, Hot Spot, Lunar Lock Out, Athena, Turbo Taxi
- Circuits : Chaîne IQ, Serpentine, Tantrix (puzzle), Python perfide
- Sauts et prises: Hoppers (Grenouilles), Solitaire, Solitair Chess
- Jeux à deux : Course à 20, Hex, Dames chinoises, Merelles, Fer à cheval, Hirondelle d'or, Patzam, Taktik, Quoridor, Yinsh, Puissance 4 et variantes ….
- Jeux numériques à deux : Numeriplay, Magix 34
- Placements et contraintes : Zalogo, Cube 36, Problèmes des demoiselles
- Polyèdres de paix

Analyse du jeu « Fer à cheval » : Pour le placement, il faut éviter de mettre ses pièces en c et d ou a et b car si l'autre met ses pièces en b et e ou c et e, le premier joueur est bloqué et a donc perdu.

Analyse du jeu « Hirondelle d'or » : Il est possible de gagner si deux sommets opposés sont libres et si les pions de même couleur sont du même côté.

13. Conclusion

Cette première approche des graphes n'offre qu'un aperçu de ce sujet vaste aux applications multiples.

Les graphes constituent un domaine privilégié pour l'abstraction et la modélisation, qui constituent à coup sûr des aspects essentiels des mathématiques.

14. Lexique

Mot	Définition
Arbre	Graphe connexe sans cycle
Arêtes adjacentes	Arêtes possédant un sommet en commun
Boucle	Arête (ou arc) reliant un sommet à lui-même
Chaîne	Succession d'arêtes, chaque arête intermédiaire de la séquence ayant un sommet commun avec l'arête précédente et l'autre sommet en commun avec l'arête suivante.
Chemin	Suite d'arêtes orientées, chaîne dans un graphe orienté
Circuit, cycle	Chaîne fermée
Cycle eulérien	Graphe possédant un cycle empruntant toutes les arêtes du graphe une fois et une seule. Propriété importante : Un cycle est eulérien si le graphe est connexe et chaque sommet est de degré pair.
Cycle hamiltonien	Cycle empruntant tous les sommets du graphe une fois et une seule.
Degré d'un sommet	Nombre d'arêtes passant par ce sommet
Distance entre deux sommets d'un graphe	Nombre minimum d'arêtes d'une chaîne allant d'un sommet à l'autre.
Face	
Graphe	Ensemble sommets (ou points) reliés entre eux par des arêtes (ou arcs) pouvant être orientée ou non.
Graphe biparti	Un graphe est dit biparti si l'ensemble de sommets peut être partitionné en deux classes de sorte que les sommets d'une même

	classe ne soient jamais adjacents, c'est-à-dire reliés par une arête.
Graphe complet	Graphe où chaque sommet est relié à chacun des autres
Graphe connexe (signification : « d'un seul tenant »)	Un graphe sera dit connexe si, pour toute paire de sommets, il existe une chaîne ou chemin les reliant. Si ce chemin est orienté, on parlera de connexité forte.
Graphe dual d'un graphe G	Graphe dont les sommets correspondent aux faces de G et reliés par une arête ssi les faces correspondantes ont une arête en commun dans G
Graphe eulérien	Graphe possédant un chemin empruntant toutes les arêtes du graphe une fois et une seule. Ce chemin est dit eulérien.
Graphe hamiltonien	Graphe possédant au moins un cycle empruntant tous les sommets du graphe une fois et une seule. Ce cycle est dit hamiltonien.
Graphe orienté	Graphe dont toutes les arêtes sont munies d'un sens, une orientation
Graphe planaire	Un graphe est planaire s'il admet une représentation planaire, c'est à dire une représentation dans le plan telle que deux arêtes quelconques ne se coupent jamais en dehors de leurs sommets.
Graphe polygonal	graphe connexe, planaire, tel que toute arête joigne deux sommets distincts et soit au bord de deux faces distinctes.
Graphe pondéré	Graphe dont les arêtes (ou parfois les sommets) sont munies d'une valeur.
Ordre d'un graphe	Nombre de sommets du graphe
Sommets adjacents	Sommets reliés par une arête.

15. Quelques références commentées :

GRAVIER D., « *Jeux de plateau* », Mango Jeunesse, 2004 : quelques jeux simples de graphes à travers le monde.

Sites :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_graphes : site général
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Logique/DeuxEuler.htm#Pont : reprend pas mal de choses connues. A noter, l'explication de la méthode Gros-Gray pour résoudre le problème du voyageur de commerce, et l'explication du baguenaudier qui en découle.
http://mathafou.free.fr/themes/kgham.html : petit résumé et théorèmes importants
http://www.wyx.fr/Math/math.htm : tout sur le jeu de Wyx
http://www.graphes.fr/ : site particulièrement intéressant, cours de niveau supérieur

Pour en savoir plus :
Revue Tangente, HS n°12 *Les graphes*
http://testard.frederic.pagesperso-orange.fr/mathematiques/coursGraphes/index.htm : site assez complet
http://www.ac-grenoble.fr/lycee/vincent.indy/IMG/pdf_generalites_graphes.pdf : cours assez classique mais bien expliqué
http://jm.davalan.org/graphs/index.html : autre cours assez complet
http://mathadoc.sesamath.net/chapitre.php?chap=306 : cours plus ancien
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedalyc/seqdocped/graphes/cahier/cahier.htm : exercices divers avec solutions
http://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/graphes_1_.pdf : cours de terminale assez complet
http://liris.cnrs.fr/~educhene/articles/these_french.pdf