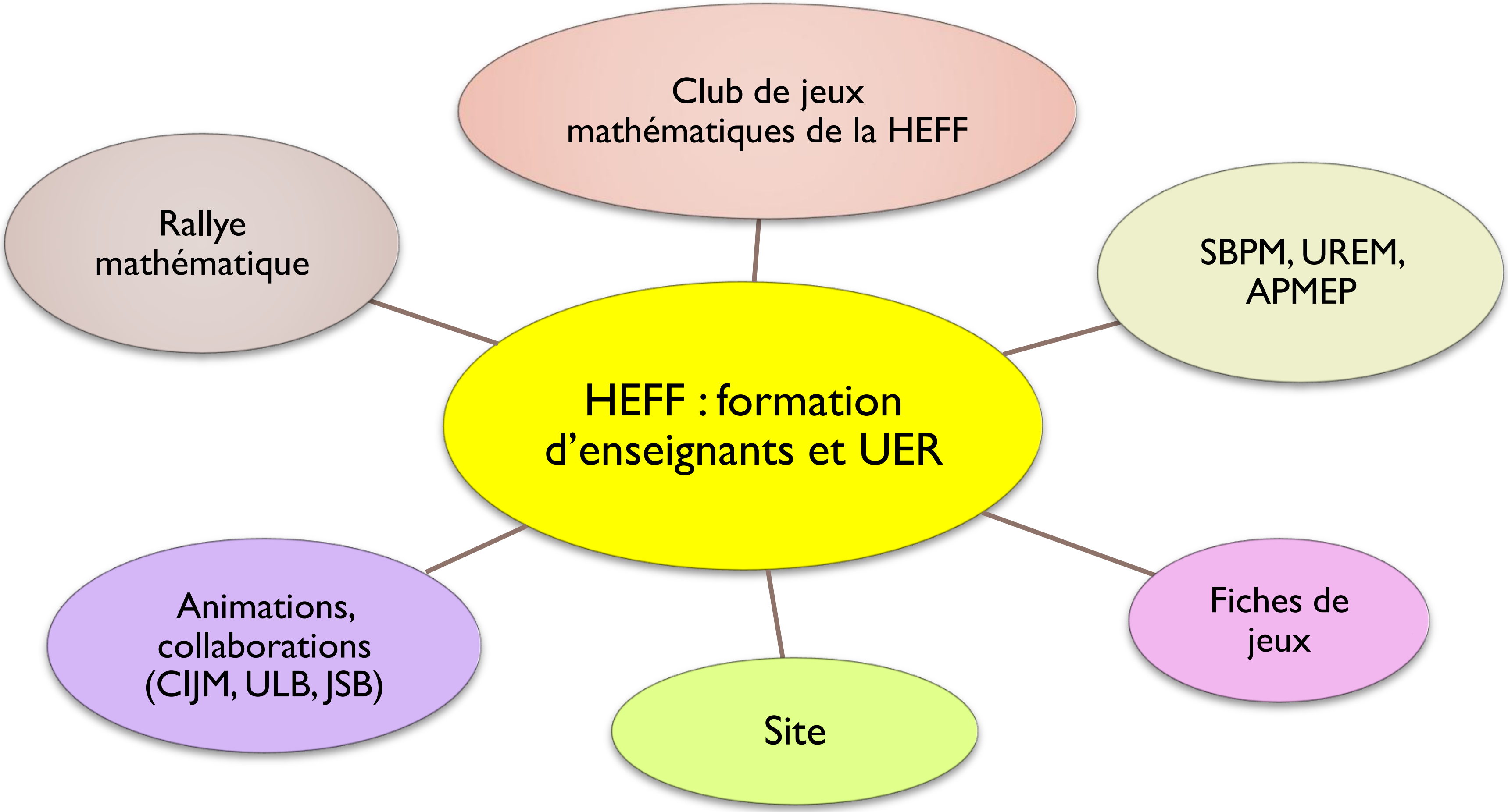
DÉCOUVRIR LES GRAPHES DÈS L'ÉCOLE PRIMAIRE

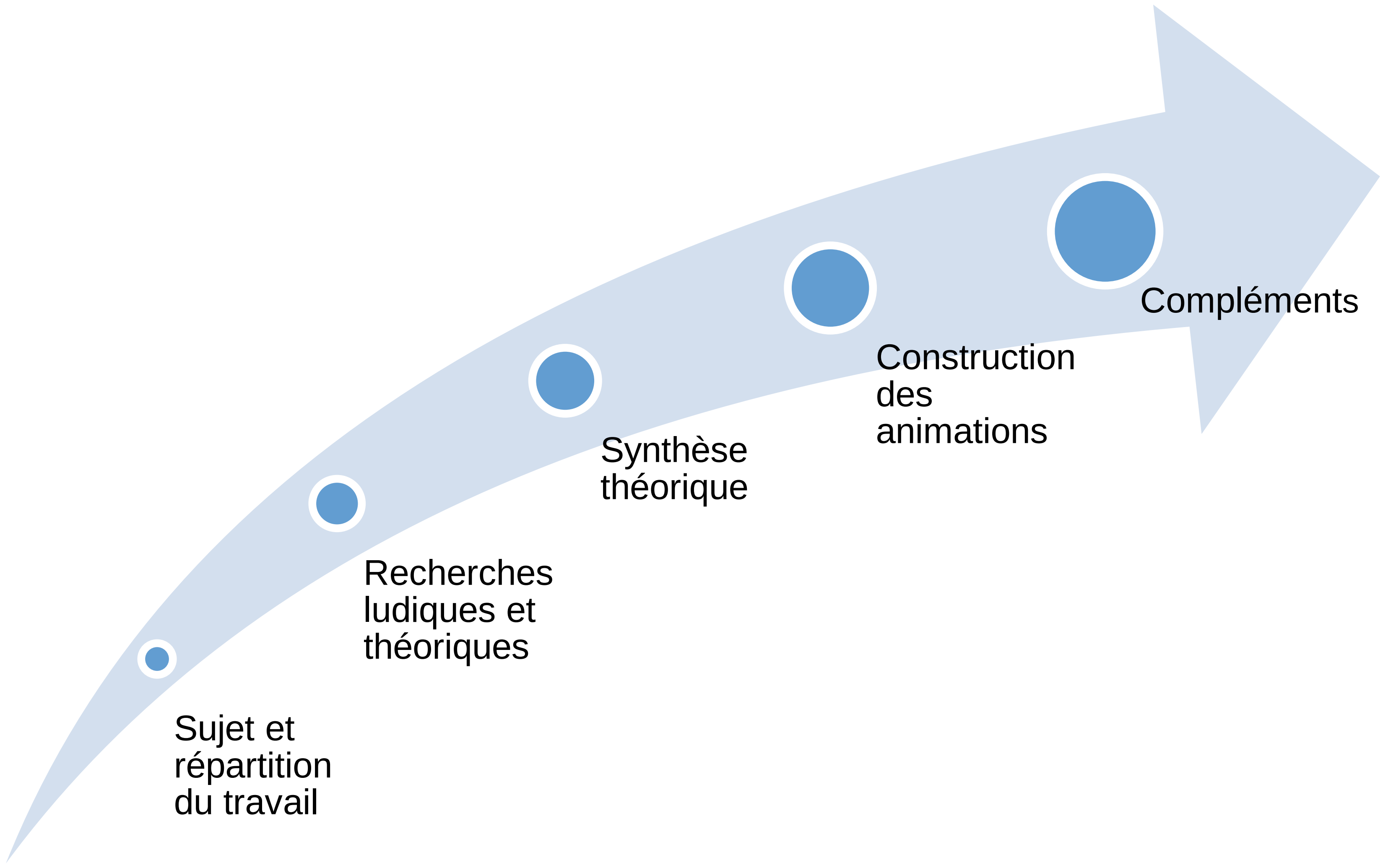
Joëlle Lamon

Toulouse, 19 octobre 2014

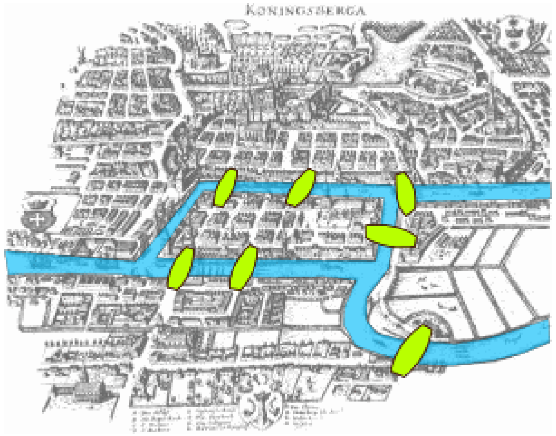
1. Présentation

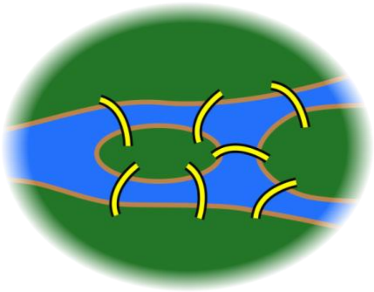


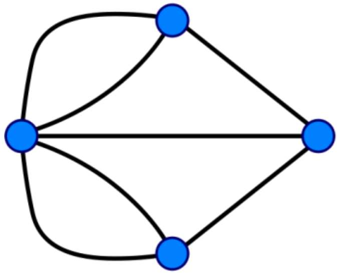
2. Construction du projet « graphes »

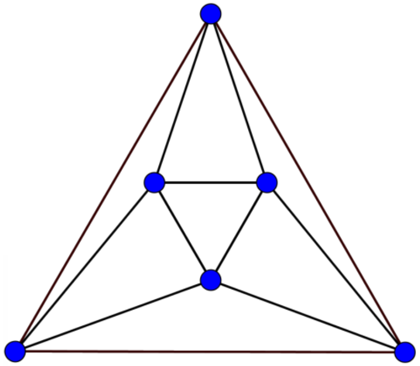


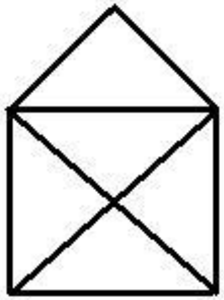
3. Euler et les ponts de Königsberg (1735)











Notions de :

- graphe, sommets, arêtes
- graphe connexe
- Chemin (chaîne), circuit (cycle), circuit eulérien

Défi : Condition pour pouvoir tracer un chemin, un circuit eulérien

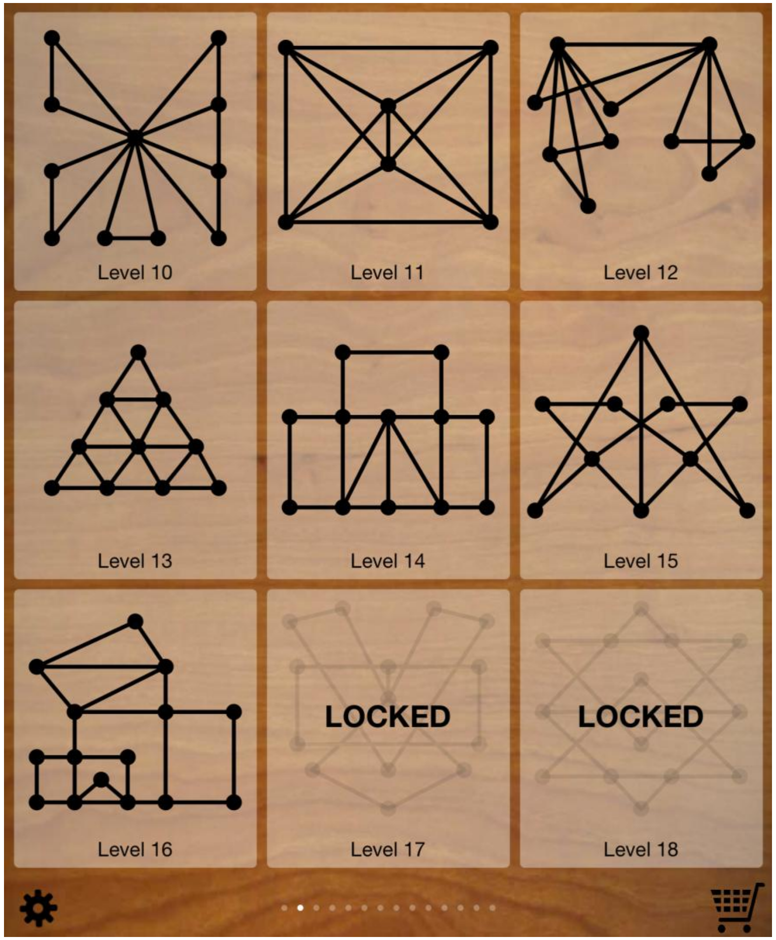
Applications :

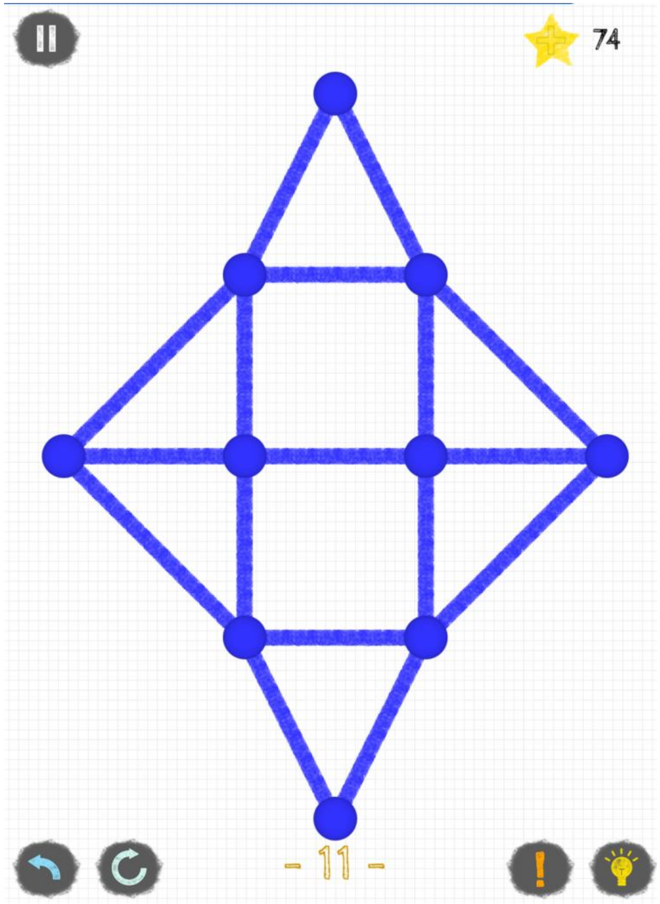
- polyèdres,
- courant devant parcourir tout un circuit électrique.

Jeux sur tablettes :

« Drawesome »,

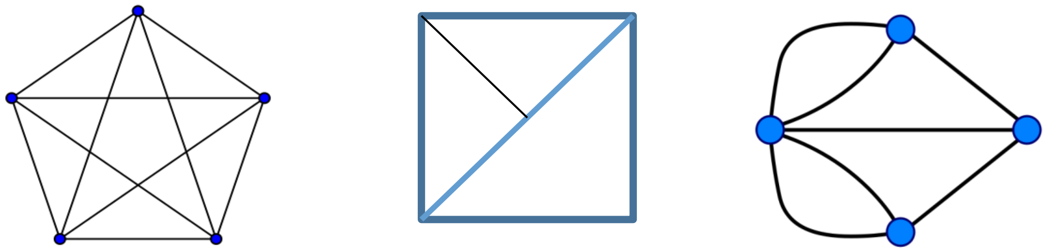
« One T Draw »



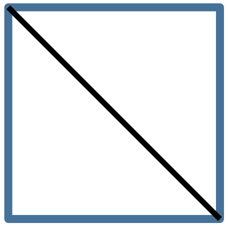


Principaux résultats :

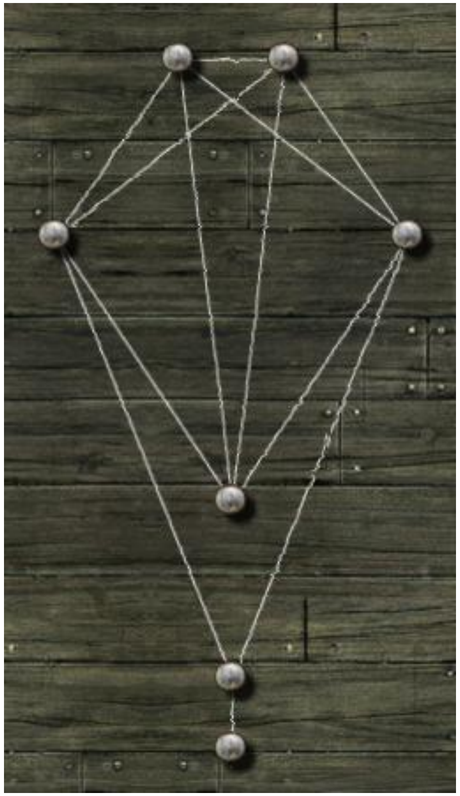
- Un <u>circuit</u> n’est eulérien que si par chaque sommet passe un nombre pair d’arêtes.
  En effet, pour construire un tel circuit, il faut arriver en chaque sommet autant de fois qu’on en part.



- Pour qu’un <u>chemin</u> soit eulérien, il faut que par chaque sommet passe un nombre pair d’arêtes, sauf éventuellement pour celui de départ et d’arrivée.



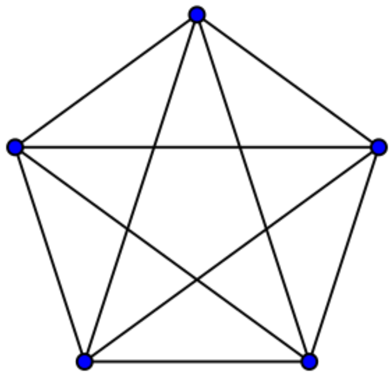
4. Hamilton et le jeu d'Icosie (1859)

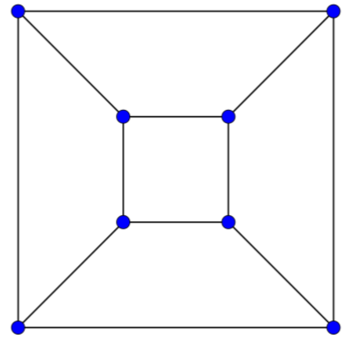


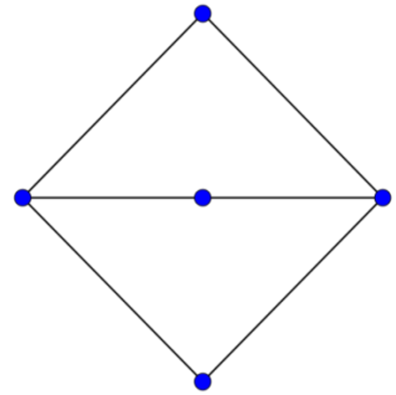
Notions de circuit hamiltonien

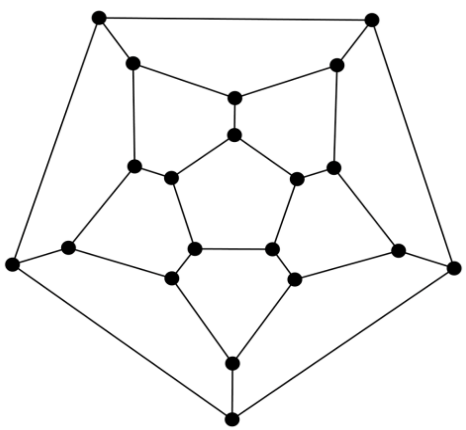
Défi : Trouver une condition pour pouvoir tracer
un circuit hamiltonien

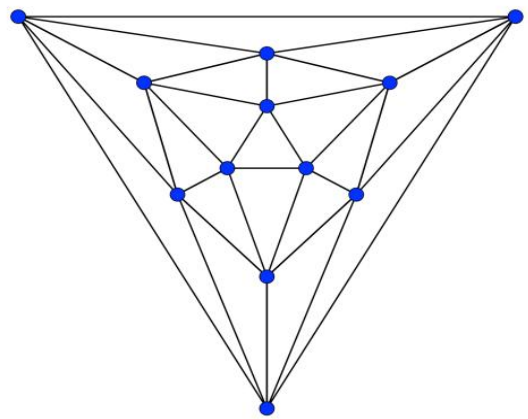
Applications :
Jeu en ligne http://neamar.fr/Res/Icosien,
polyèdres, problème du voyageur de commerce.

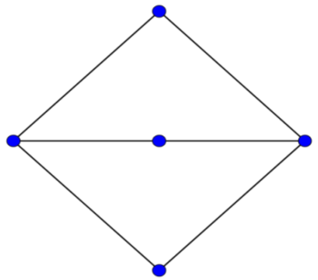












Principaux résultats :

- On ne connaît actuellement pas de condition générale nécessaire et suffisante pour avoir un graphe hamiltonien, bien que quelques conditions soient connues.
  Ce problème est dit NP-complet.

- Une condition nécessaire est par exemple qu'entre deux sommets quelconques existe toujours un chemin (c'est-à-dire que le graphe soit fortement connexe).

Pour aller plus loin :

- Si le degré tout sommet est supérieur ou égal à la moitié du nombre de sommets, alors le graphe est hamiltonien (critère de Dirac).

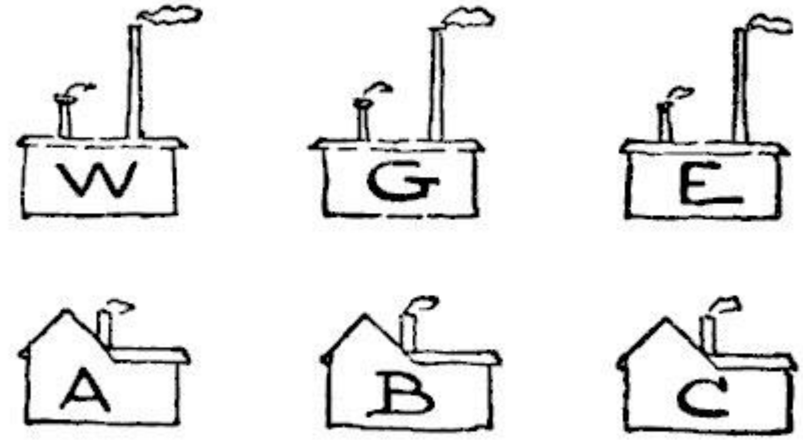
- Si, dans un graphe fortement connexe sans boucle, toute paire de sommets non reliés par une arête est telle que la somme des degrés des deux sommets est supérieure ou égale à 2n+1, n étant le nombre de sommets du graphe, ce dernier contient un circuit hamiltonien (Théorème de Meyniel).

5. Couplages, graphes planaires

Relier sans que les lignes se croisent

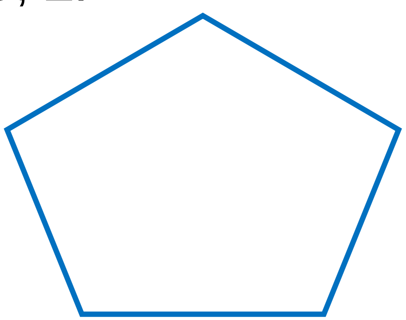
C			D	
B				
D		B	C	
	A		A	

a) les lettres identiques



b) les maisons A, B, C aux trois usines W, G, E.

c) chaque sommet à chaque autre



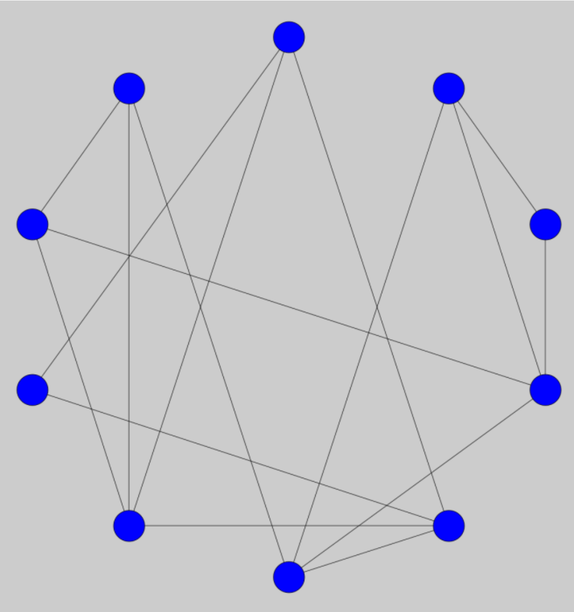
Notion : graphe planaire, graphe complet

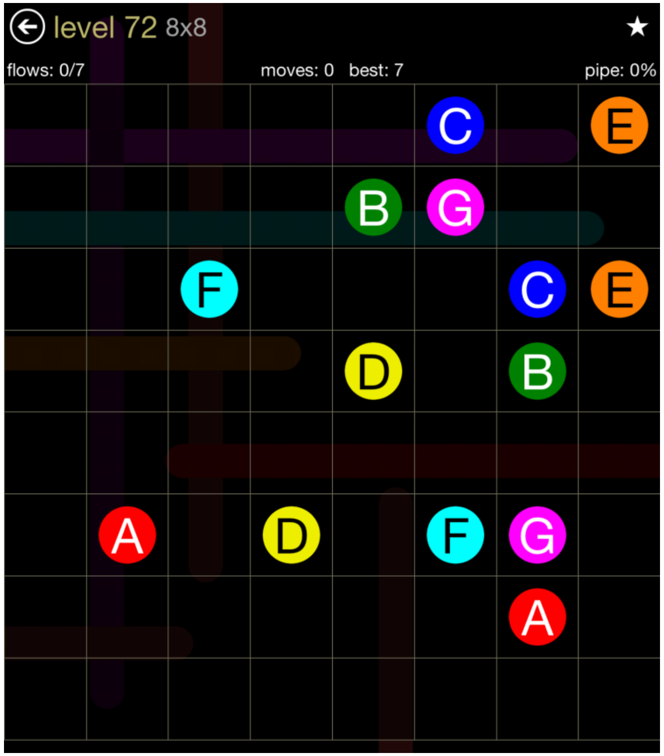
Applications : plan d’un réseau électrique

Jeux :

« planarity » (www.planarity.net) « Flow free »

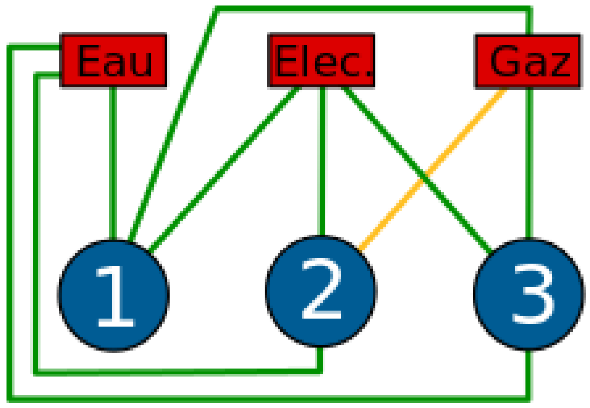
(ou «Puzzles - Untangle»)

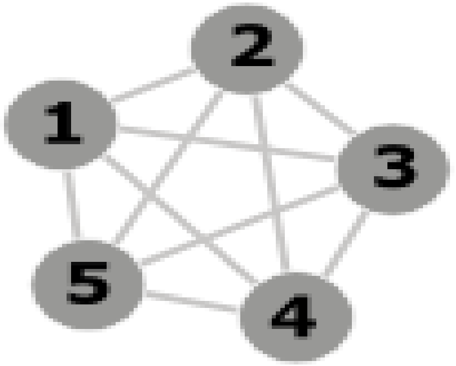




Principaux résultats :

Un graphe comportant une partie du type $K_{3,3}$ ou K_5 n'est pas planaire. (Kuratowski)





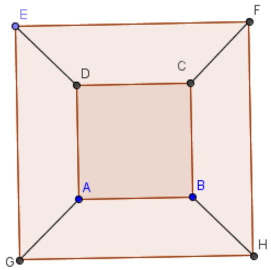
6. Formule d'Euler

En comptant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces sur des solides « classiques » (polyèdres réguliers, prismes, pyramides) ou sur de simples polygones, on peut trouver un lien entre les nombres obtenus.

1°) Quel est ce lien ?

2°) Est-ce toujours valable ?

3°) Peut-on justifier ceci ?



Principaux résultats :

- La formule trouvée est s + f – a = 2 (ou équivalente)
- Un outil pour représenter des polyèdres sous forme de graphe est le diagramme de Schlegel
(avec face extérieure pour garder les propriétés)
- La formule ne s’applique qu’aux graphes polygonaux, c’est-à-dire aux graphes connexes, planaires, et tels que toute arête joigne deux sommets distincts et soit au bord de deux faces distinctes.
Contrexemples : graphes non planaires,
graphes non polygonaux

Recherche de tous les polyèdres réguliers convexes.

Si on appelle n le nombre d'arêtes d'une face et p le nombre d'arêtes passant par un sommet, on a
$2a = nf$ et $2a = ps$. ($n > 2$ et $p > 2$)

La formule d'Euler $s + f – a = 2$ devient :
$2a/p + 2a/n – a = 2 \Leftrightarrow a(2n + 2p – np) = 2np$.
$2n + 2p – np$ étant positif,
son opposé $np - 2n - 2p + 4 - 4 =(n-2)(p-2) – 4 < 0$
ce qui revient à $(n – 2) (p – 2) < 4$.

Les cinq solutions naturelles correspondent aux cinq polyèdres réguliers convexes :

- $n = 3$, $p = 3$ donne le tétraèdre régulier,
- $n = 4$, $p = 3$ donne le cube,
- $n = 3$, $p = 4$ donne l'octaèdre régulier,
- $n = 5$, $p = 3$ donne le dodécaèdre régulier,
- $n = 3$, $p = 5$ donne l'icosaèdre régulier.

7. Distance et graphes

Sur divers graphes dont les polyèdres, on peut compter le nombre d’arêtes séparant deux sommets.

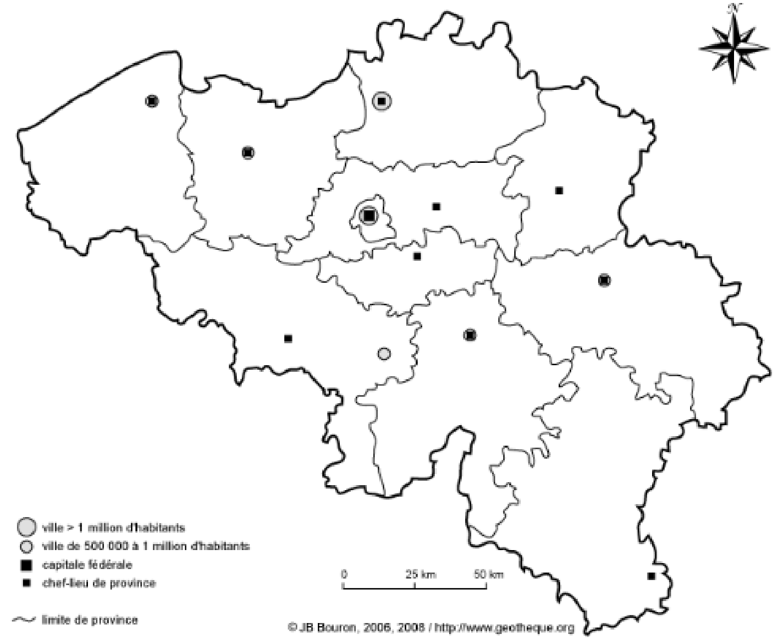
Ceci permet de définir une distance sur un graphe et par exemple de chercher le sommet le plus éloigné d’un sommet donné ou le chemin le plus court entre deux sommets. La solution n’est pas toujours unique.

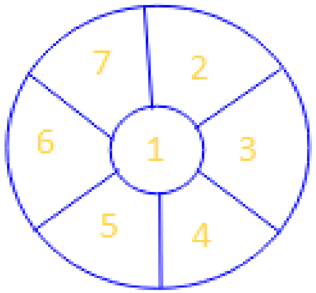
Notion : distance

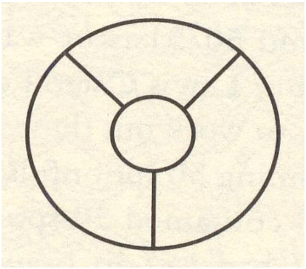
Applications : déplacement dans un réseau (transports par exemple), taxidistance, correction d’erreurs, distance et réseaux sociaux, recherche du nombre de chemins différents pour se rendre d’un point A à un point B par le chemin le plus court, …

8. Coloriage de cartes

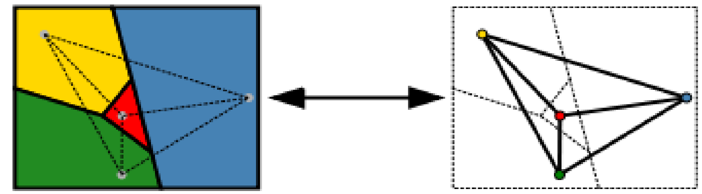
Défi : colorier avec le moins de couleurs possible :







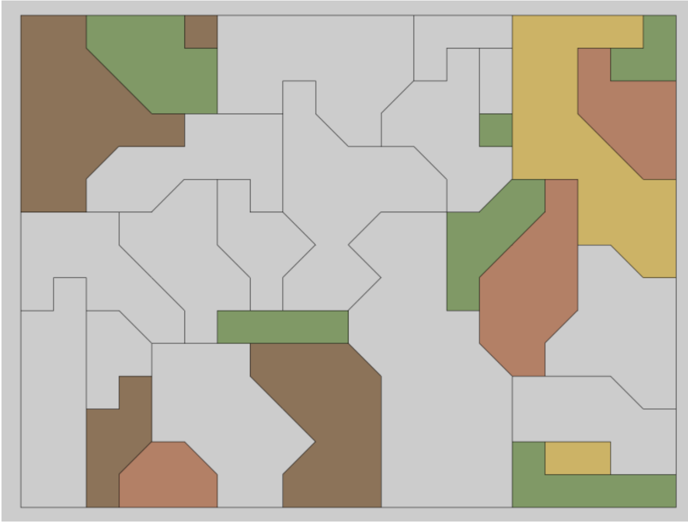
Notions : nombre chromatique,
graphe dual



Principaux résultats :

- Dans chaque cas, le nombre de couleurs est maximum 4.
- Ce problème, posé par Guthrie en 1852, n’a été résolu qu’en 1976 avec l’aide d’ordinateurs.

Applications : jeu « Snort »,
jeu sur tablette « Puzzles–Map »
confection d'horaires, organisation de tournois.



Prolongement : pavages

9. Graphes et contraintes

Exemples :

- Carré latin et problème des 36 officiers (Euler)

- Placement de pièces non en prise sur l’échiquier

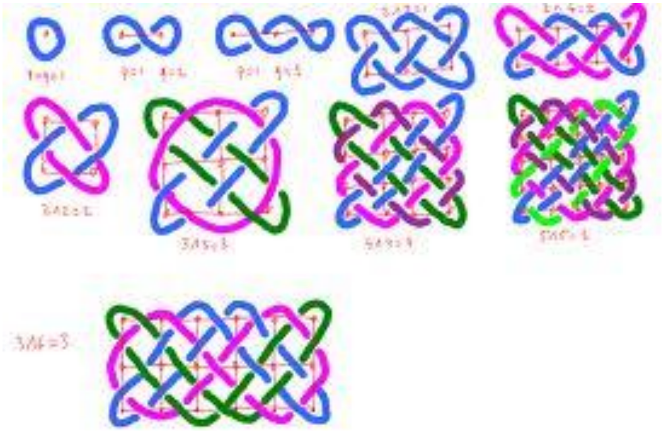
- Parcours de toutes les cases d’un échiquier par un cavalier, solitaire, …;

- Déplacement de pièces avec contraintes, …

Prolongements :

- Construction d’itinéraires et de circuits avec divers types de pièces,
- Avec les nombres 1, 2, 3, 4 utilisés chacun une seule fois et les 4 opérations, obtenir les nombres de 0 à …, …
- Placement de nombres avec contraintes (jeu Zalogo)

- Recherche de polyèdres tels que chaque sommet est relié au même nombre d’arêtes (prolongement : polyèdres de paix),
- Echange de pièces blanches et noires d’un plateau de jeu,
- Lumières à allumer ou éteindre
- Oulipo et créations littéraires avec contraintes
- Entrelacs.



Résultats et prolongements :

- Euler a analysé le problème des 36 officiers et a trouvé son impossibilité, qui sera démontrée en 1901 par la français Gaston Tarry.
- Sam Loyd a proposé de nombreux problèmes sur un échiquier, et notamment l'échange de cavaliers : ces problèmes ont été repris et analysés par Martin Gardner.

10. Organisation temporelle

Principe :

On donne les différentes étapes d’un projet, leur durée, celles qui doivent être effectuées avant d’autres.

On demande la durée totale minimum.

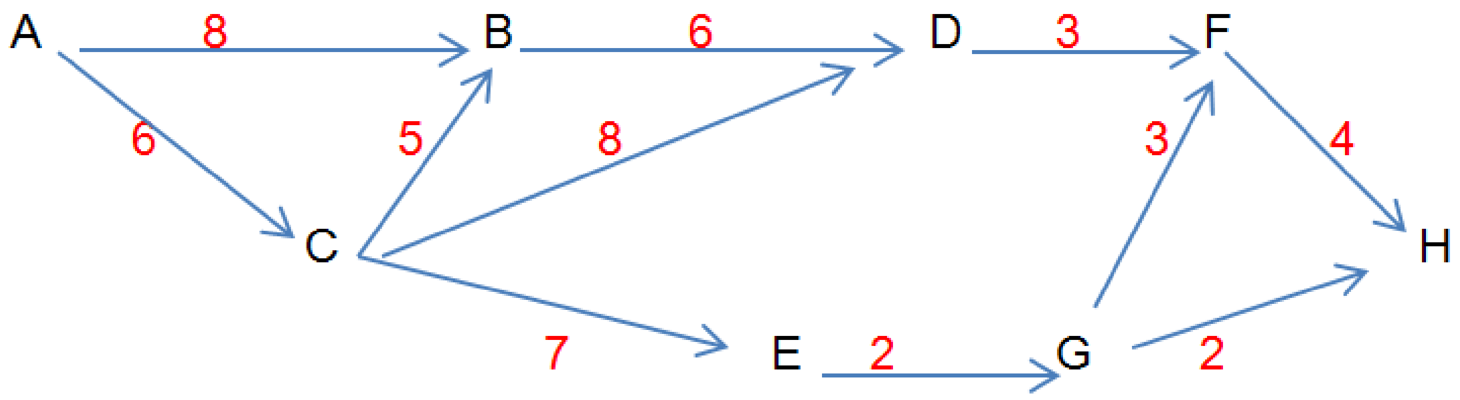
Applications : tous types de projets : organisation d’un événement, recette de cuisine, construction d’une maison, calcul d’un temps de parcours sur un réseau routier, recherche opérationnelle…

Notion : graphe orienté

Principaux résultats : algorithmes

- PERT : recherche du chemin critique (chemin le plus long entre le début A et la fin du projet).

- Dijkstra : recherche de proche en proche des plus courts chemins allant de A aux autres points



11. Affectation et graphes pondérés

Exemples :

- Choisir une destination différente de voyage scolaire pour un ensemble de classes en fonction des préférences exprimées,

	Berlin	Copenhague	Dublin	Florence	Madrid	Salzbourg
5A	7	6	5	1	5	2
5B	8	7	7	3	6	6
5C	8	9	7	10	10	9
6A	5	4	7	6	0	3
6B	6	6	4	5	8	4
6C	3	10	0	7	0	4

- Affecter à un ensemble de personnes (ou de robots ou d’entreprises) des tâches en fonction de leurs compétences ou des différents coûts,

- Problèmes de poignées de mains :
  - *« Lors d’une rencontre entre amis, 39 personnes sont venues et ont fait la fête toute la soirée. Si chaque personne a serré la main de chaque autre, combien de poignées de mains y a-t-il eu ? »*

  - *« Lors d’un événement, il y a eu un échange de 216 poignées de mains. Chaque personne donne exactement 3 poignées de mains. Combien de personnes y avait-il ? »*

- Organisation de tournois,

- Problème des huit demoiselles (Lucas)

  « À cette époque, les huit demoiselles d'un pensionnat se promenaient tous les jours en rang par deux.
  Le problème était de trouver comment les disposer pour qu'en un nombre maximal de jours elles n'aient pas deux fois la même voisine. »

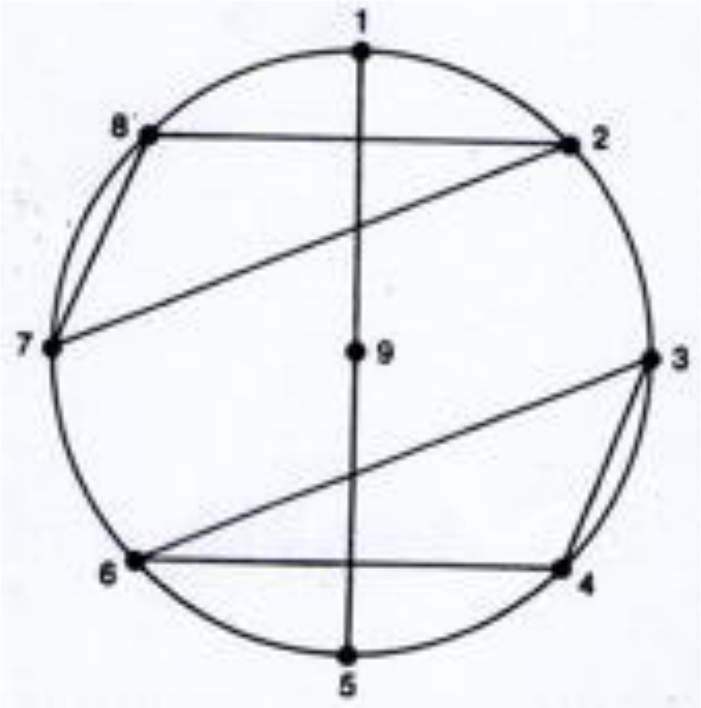
- Problème des quinze demoiselles de Kirkman

  « Les quinze demoiselles de Kirkman se promènent en rang par trois. On veut que deux quelconques des filles se retrouvent une fois et une seule ensemble dans la même rangée de trois. En combien de jours est-ce possible ? Donner une solution. »

- Variante plus simple :
  même problème avec neuf demoiselles

Théorisation possible : algorithmes (Z, support)

Lucas et Kirkman (1850) ont proposé une solution au problème des neuf demoiselles, analysé un peu plus tard en profondeur par Steiner et repris par Gardner sous une forme originale.



12. Des compétences ?

Compétences transversales :

- *Se poser des questions*
- *Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, solides)*
- *Présenter des stratégies qui conduisent à une solution.*
- *Créer des liens entre des faits ou des situations*
- *Construire une formule, une règle, schématiser une démarche, c'est-à-dire ordonner une suite d'opérations, construire un organigramme*
- *Procéder à des variations pour en analyse les effets sur la résolution ou le résultat et dégager la permanence de liens logiques.*

Compétences disciplinaires :

- *Se situer et situer des objets.*
- *Dans le domaine des solides et des figures, représenter, sur un plan, le déplacement correspondant à des consignes données*.
- *Associer un solide à sa représentation dans le plan et réciproquement.*

Les graphes constituent un domaine privilégié pour l’abstraction et la modélisation, qui constituent à coup sûr des aspects essentiels des mathématiques.

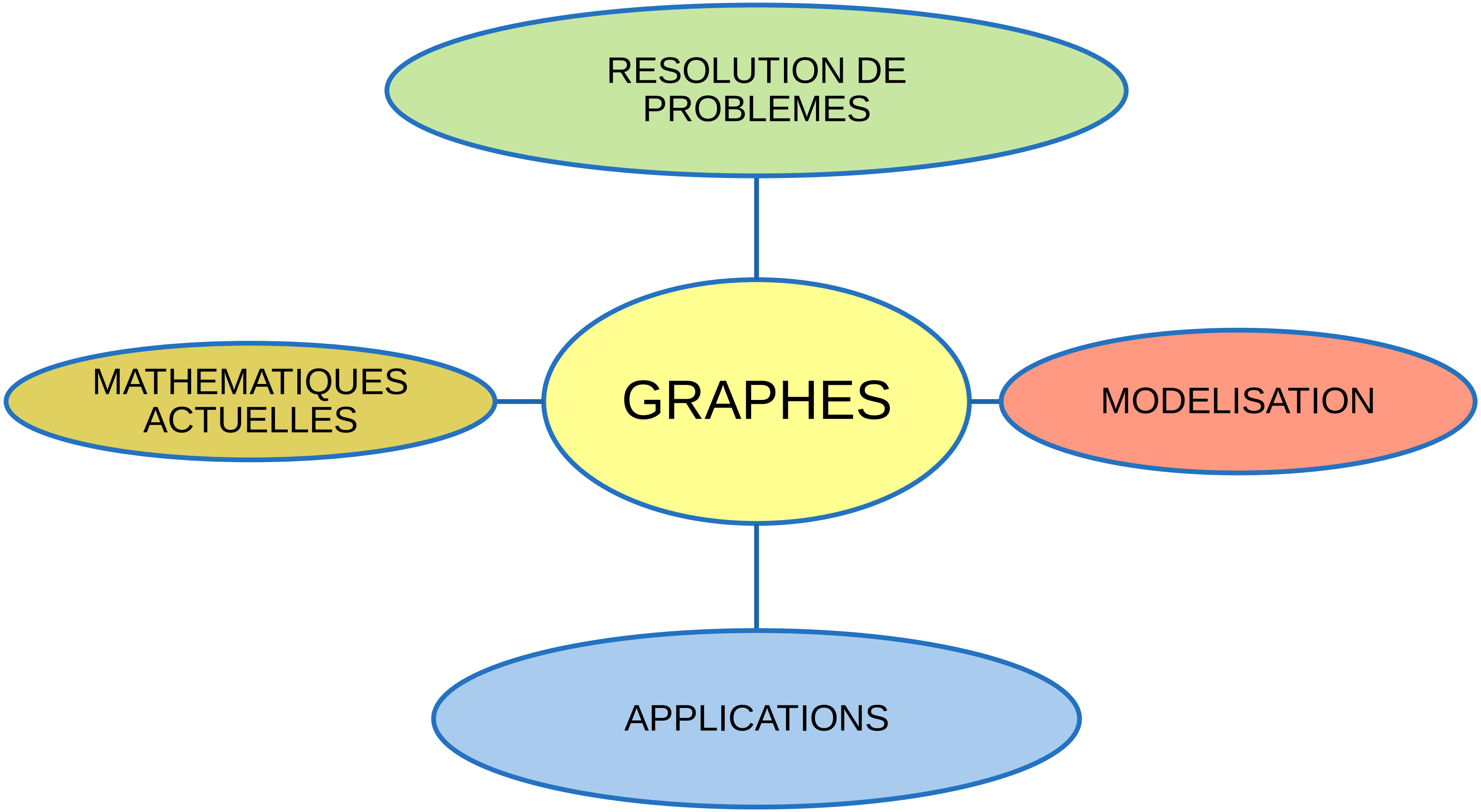
13. Prolongements possibles

- Evolution d’un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans plusieurs états.
- Analyse de jeux se déroulant sur un graphe et recherche de stratégie gagnante (type morpion et mérelles, puissance 4, Magix 34, Hex, Fer à cheval, …)
- Jeux et civilisations, jeux d’alignement, jeux divers dont le plateau est un graphe.
- Problèmes d’échanges de pions (ou de cavaliers) de deux couleurs données en un minimum de coups, problèmes d’allumage de lampes
- Recherche de déplacements avec contraintes (jeux Athena, Embouteillages, Ane rouge, …)
- …

14. Quelques jeux sur ce thème

- Jeux de puzzles et chemins (Turbo taxi, Go getter)
- Jeux de puzzles et circuits (Chaîne IQ, Serpentine, Python perfide, méandres)
- Jeux de déplacements avec contraintes (River Crossing, Hot Spot, Lunar Lock out, Athena, Solitaire Chess)
- Jeux à deux (Hex, dames chinoises, jeux d’alignement, jeux numériques)

15. Conclusion



Merci pour votre attention !

Joëlle Lamon
Haute Ecole Francisco Ferrer (Bruxelles)
joellelamon@yahoo.fr
www.jeuxmathematiquesbruxelles.be
https://sites.google.com/site/jeuxmathematiquesbruxelles