

LES ALIGNEMENTS, SOURCE DE BIEN DES JEUX ET DÉFIS

Tipaza, août 2013

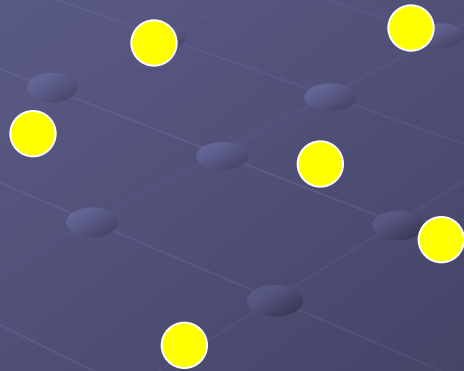
Plan de l'exposé

- Introduction
- 1. Approche historique
- 2. Approche didactique
- 3. Types de jeux et défis
- 4. Pour aller plus loin
- Conclusion

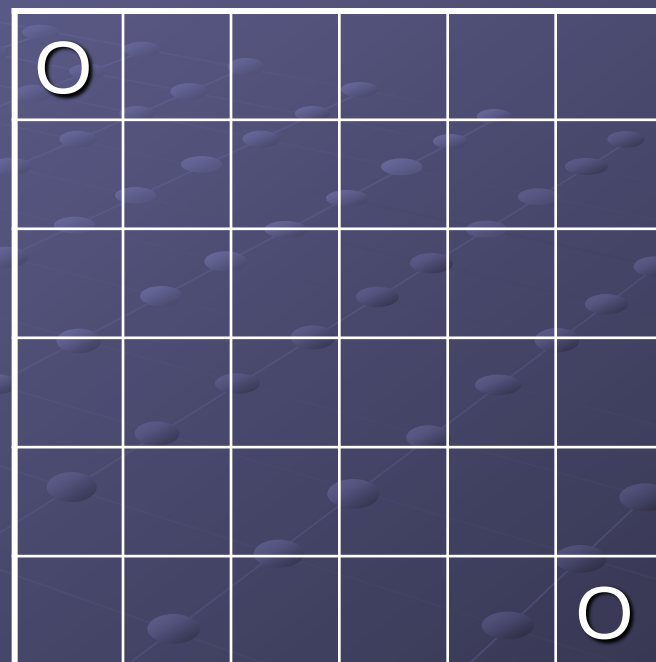
Introduction

- Intérêt du sujet
 - Présence de ce type de problème
 - Curiosités mathématiques
 - Richesse des exploitations
- Quelques défis :

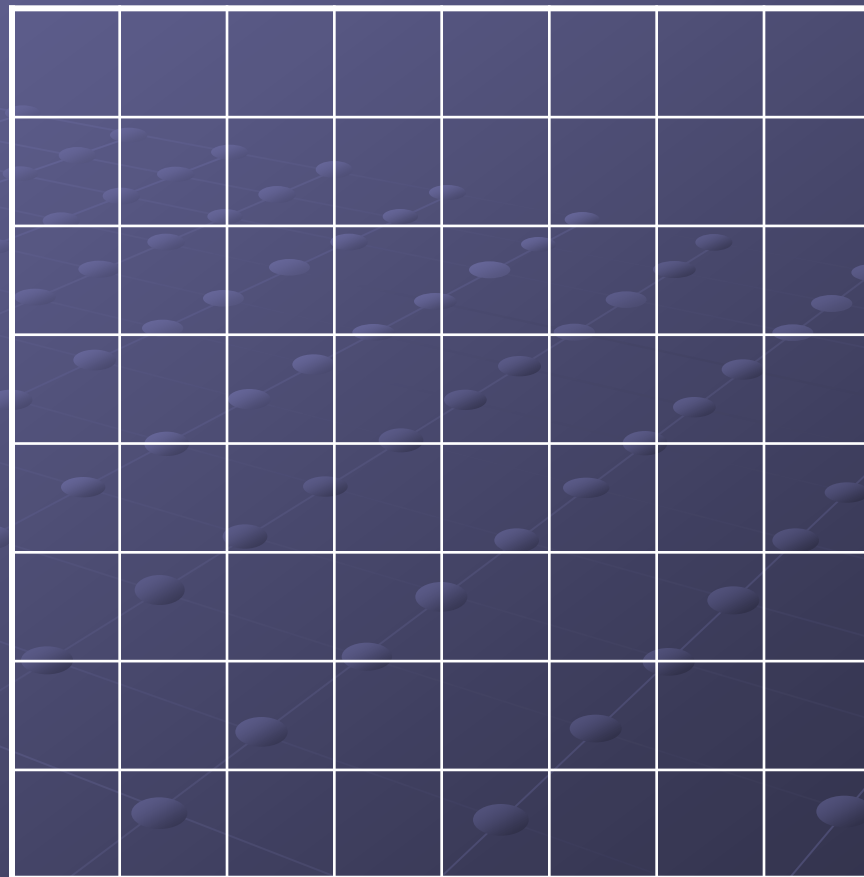
1. Placer neuf points en formant dix alignements de trois points (Newton).
2. Déplacer un cercle pour avoir 4 rangées de 3 cercles (Lloyd).



3. Placer 12 pions de sorte qu'il n'y ait pas plus de deux pions alignés sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale. Deux pions sont déjà placés (Loyd).



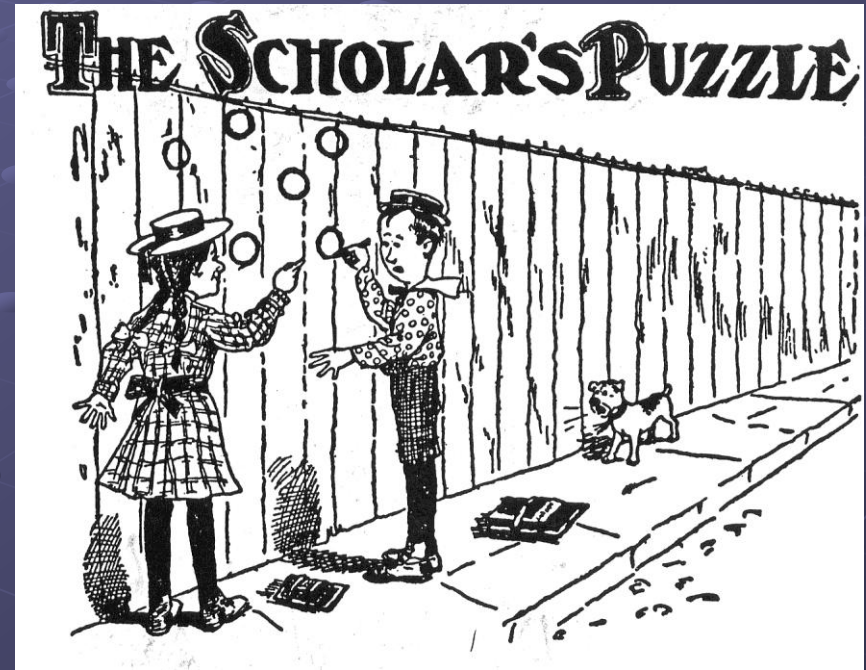
4. Dans ce carré 8 x 8, placer huit pions de sorte qu'il n'y ait jamais deux pions sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale et que trois pions ne soient jamais alignés (Loyd).



Problème d'écoliers (Loyd)

Déplacez un cercle pour faire quatre rangées.

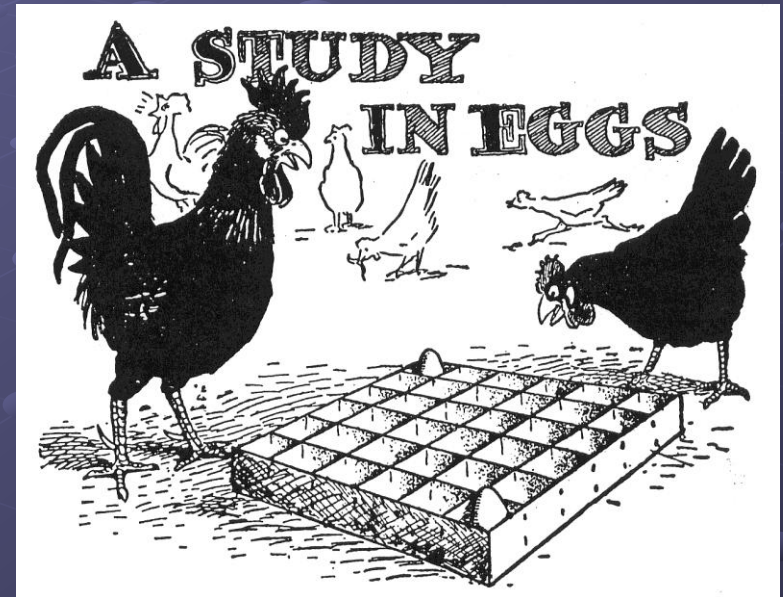
"Jennie, la meilleure élève de la classe, expose un intelligent casse-tête à Joe, son camarade de classe. Après avoir dessiné six petits cercles sur la palissade, elle lui dit : "Maintenant tu ne vois que deux rangées de trois cercles. Je veux que tu effaces un des cercles et que tu le redesses quelque part sur la palissade pour qu'il y ait quatre rangées de trois cercles"."



Une étude sur les œufs (Loyd)

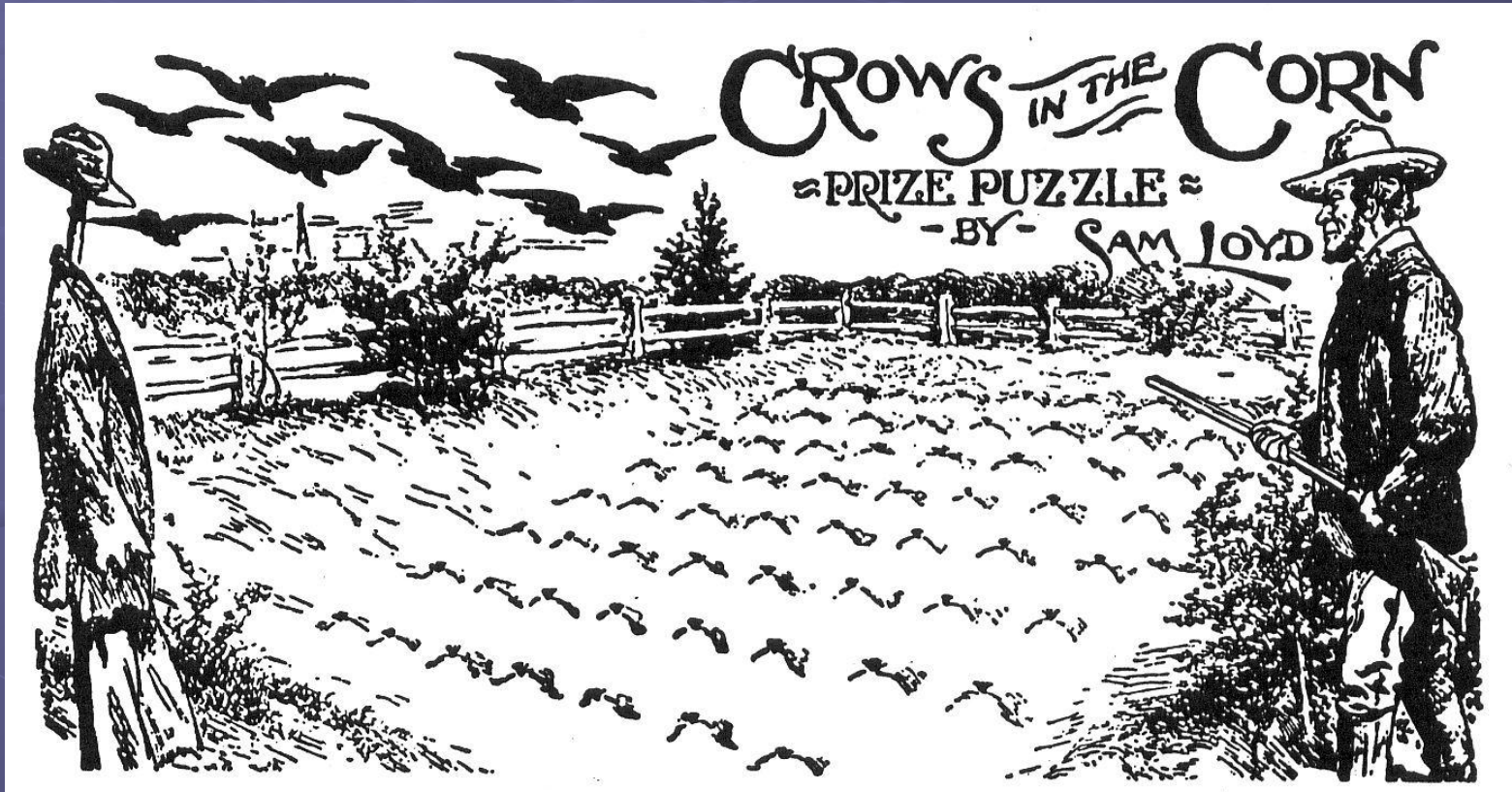
Combien la caisse peut-elle contenir d'œufs ?

"Les deux poules se demandent combien d'œufs elles peuvent disposer dans la caisse sans mettre plus de deux œufs par rangée, y compris en diagonale. Deux œufs ont déjà été placés, aussi ne peut-on pas rajouter d'œufs sur cette rangée en diagonale."



Les corbeaux dans le champ de maïs (Loyd)

Montrez comment les huit corbeaux peuvent se poser sans qu'il y en ait trois d'alignés.



"Un ornithologue renommé décrivant les habitudes et la sagacité des oiseaux raconte comment il a vu une bande de corbeaux se poser sur un champ de maïs et s'y disposer selon les règles de la tactique militaire. Chaque oiseau était posé tel une sentinelle, de façon à pouvoir observer chacun de ses compagnons et les tenir tous informés par des gestes muets de l'apparition d'un danger éventuel.

Sans vouloir entrer dans le détail de la télégraphie sans fil des corbeaux, nous voudrions faire remarquer que l'affirmation du distingué ornithologue implique un intéressant problème de répartition des sentinelles.

Considérez soixante-quatre points, tels que les centres des cases d'un échiquier ou tels que les petits monticules du maïs en herbe. Le problème est alors de placer huit corbeaux de telle façon qu'il n'y en ait pas deux sur la même ligne, colonne, ou diagonale et que le chasseur, en tournant autour du champ, ne puisse jamais viser trois corbeaux en même temps.

Ce problème est très proche du problème bien connu dans lequel je demandais de placer huit dames sur un échiquier de façon à ce qu'aucune n'en attaque une autre, mais il lui est supérieur. Ce problème des corbeaux ne peut se résoudre que d'une solution."

1. Approche historique

➤ Traces historiques d'alignements



➤ Traces plus récentes d'alignements

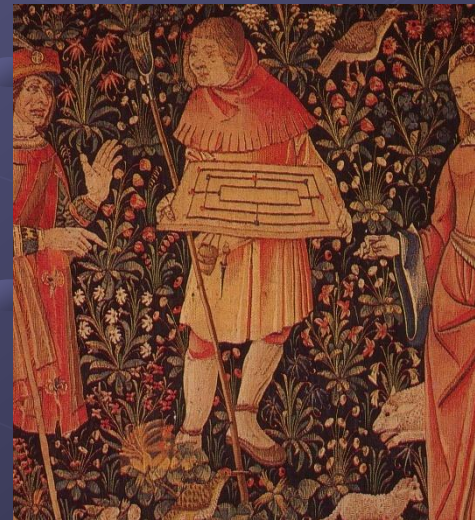
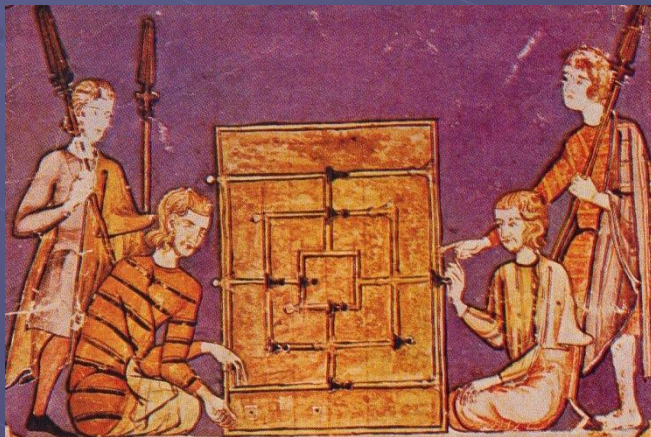


➤ Marelles et mérelles

Naissance : Mésopotamie, puis diffusion par les Phéniciens ; "Jeu du diagramme" en Grèce.

Traces jusqu'en Irlande : jeu physique et jeu de réflexion.

France : mérelles



Allemagne : "*Jeu du moulin*"

Angleterre : "*Nine men's morris*" (fin XIIIe)

Japon : "*Renju*", "*Gomoku Ninkuni*"

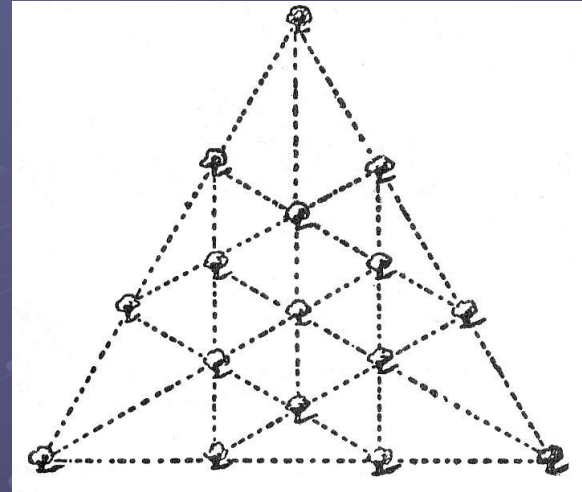
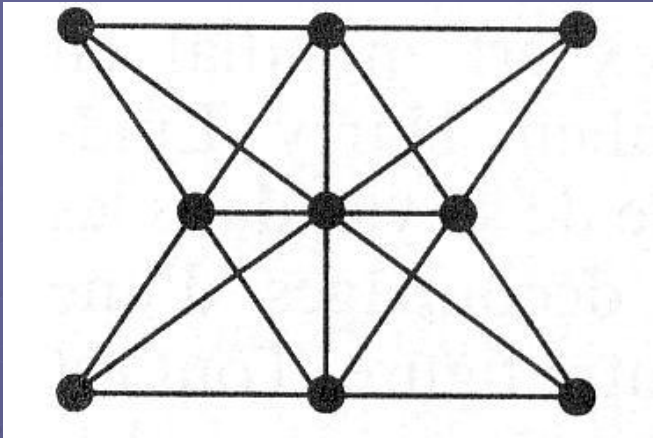
Mongolie : "*Hirondelle d'or*"

Liban : "*Dris*"

Côte d'Ivoire : "*Hema*"

➤ Défis mathématiques

- Planter neuf arbres en formant dix alignements de trois arbres (Newton, 1643-1727).
- Un châtelain du Sussex possédait une plantation de seize chênes, disposés de telle sorte qu'ils formaient douze alignements de quatre arbres. On demande comment faire pour les disposer en quinze rangées de quatre (Dudeney, 1847-1930).



- Problème du verger (1893)
Etant donnés n arbres tels que quatre d'entre eux ne soient jamais alignés, combien d'alignements de trois arbres peut-on avoir ? (Sylvester, 1814-1897)

Nombre d'alignements de 3 points
pour n points donnés :

Points	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lignes	1	1	2	4	6	7	10	12	16	19

Nombre d'alignements de 4 points
pour n points donnés :

Points	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lignes	-	1	1	1	2	2	3	5	6	7

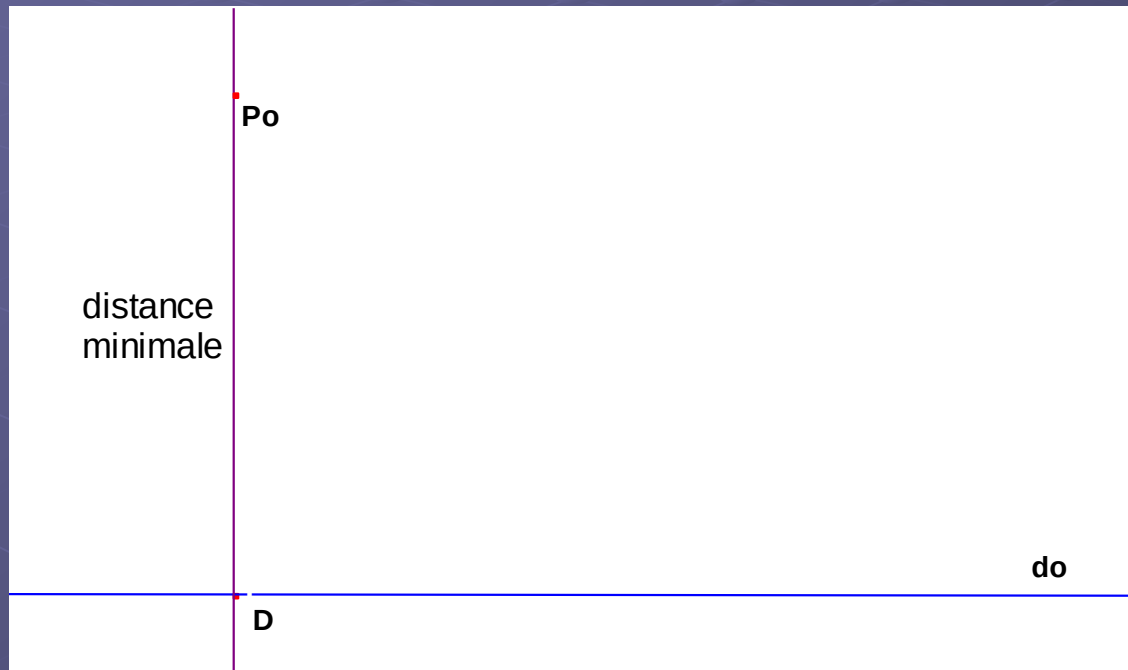
2. Approche didactique

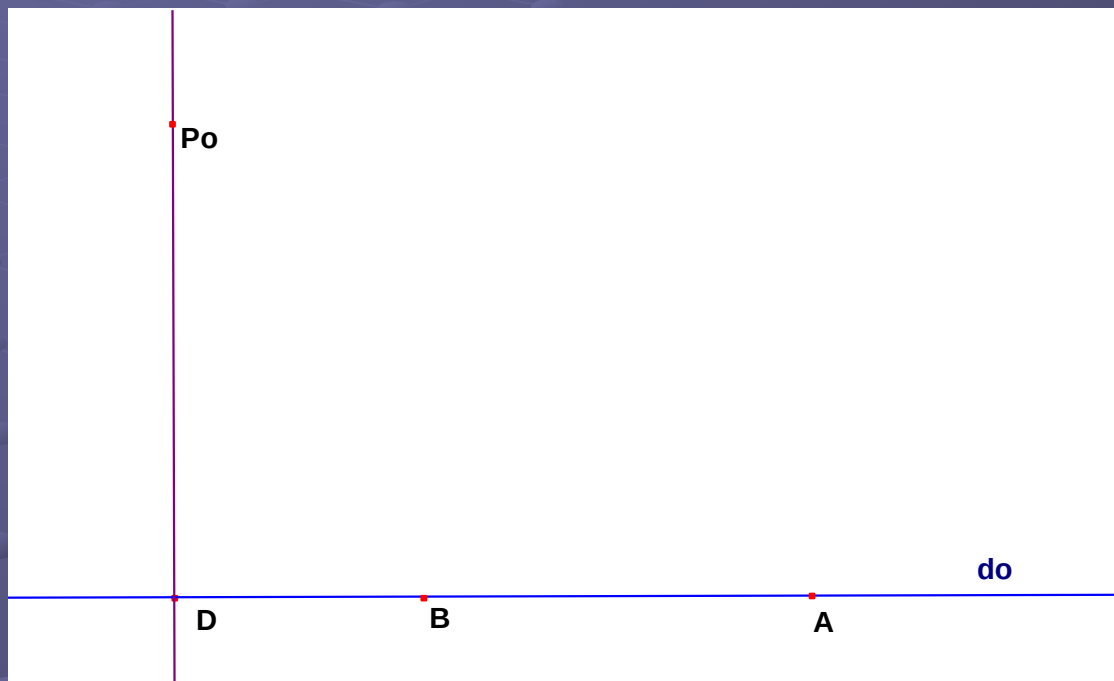
Alignement : disposition sur une ligne droite.

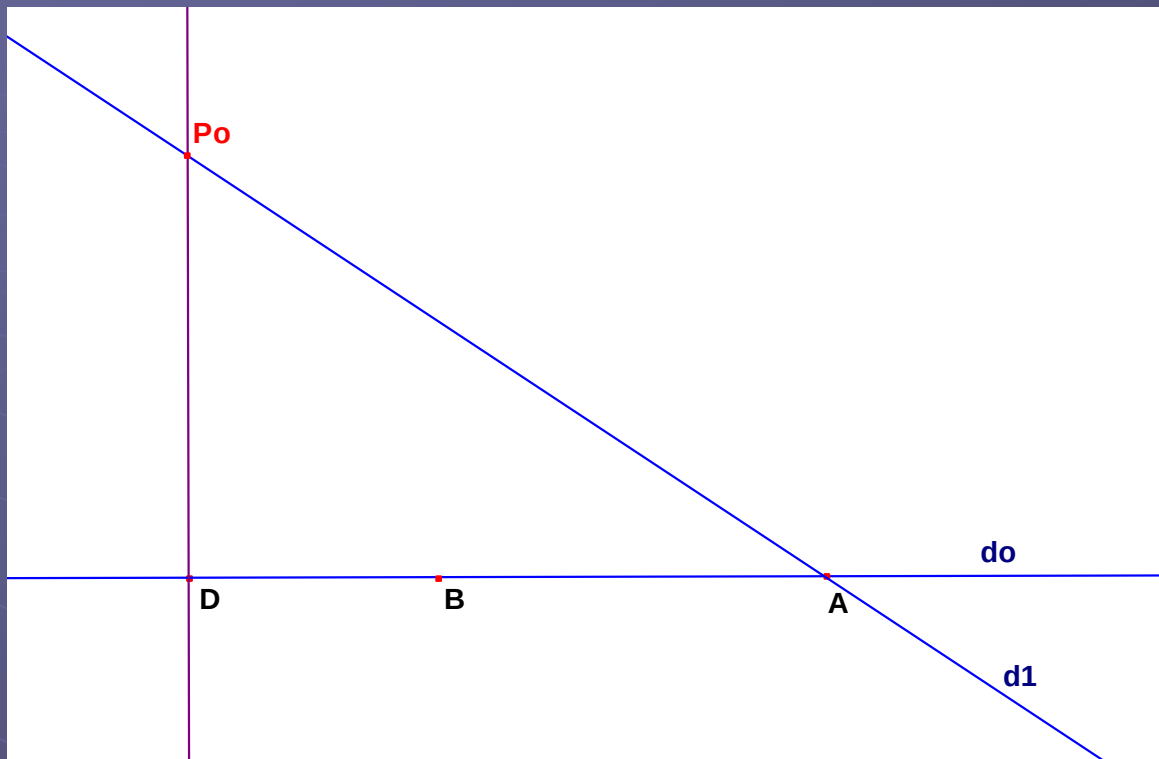
- a) Théorème de Sylvester (1893) :
Est-il possible de dessiner un nombre fini de points de sorte que sur toute droite qui relie deux quelconques d'entre eux se trouve au moins un nouveau point de l'ensemble, sans que tous les points ne se trouvent sur une même droite ?

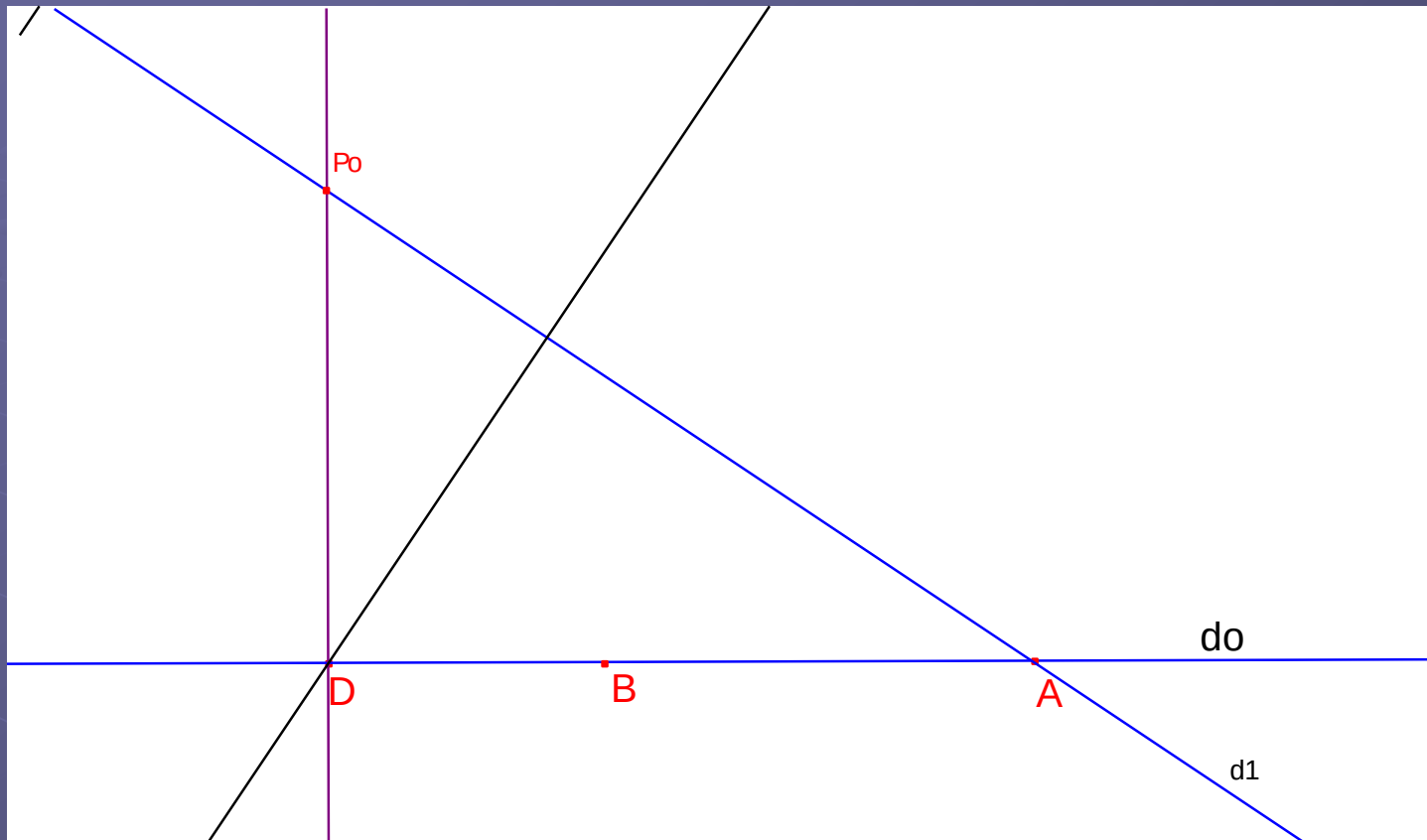
Démonstration (Kelly, 1948)

Outil : distance d'un point à une droite







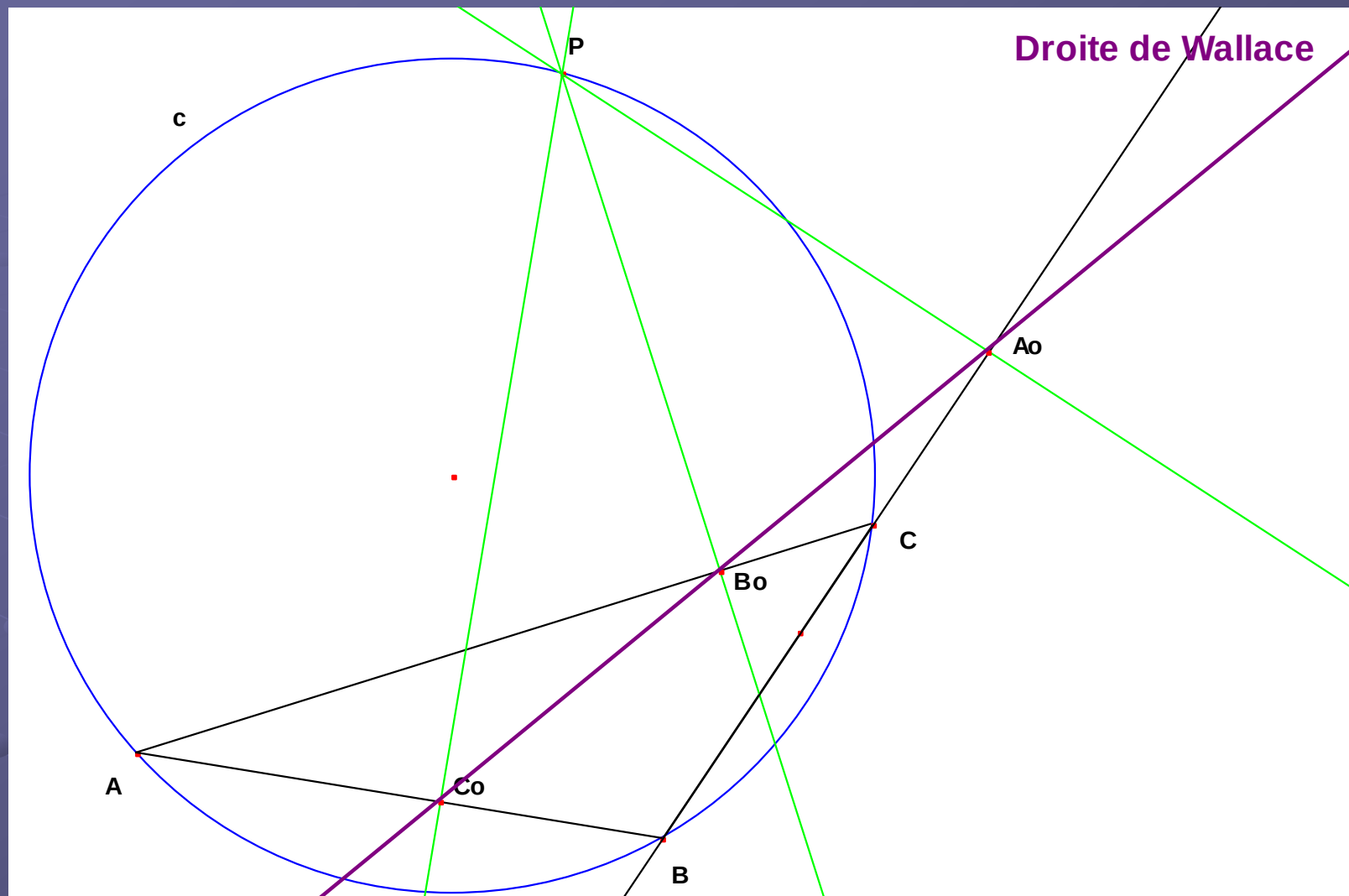


La distance (B, d_1) est inférieure à la distance minimale !

b) Droite de Wallace (1897) :

Soit un triangle ABC et un point P appartenant à son cercle circonscrit c . Les pieds A_0 , B_0 et C_0 des perpendiculaires issues de P sur chacun des côtés du triangle ABC sont situés sur une même droite appelée "droite de Wallace".

Droite de Wallace



Démonstration

Outil : théorème de l'angle inscrit

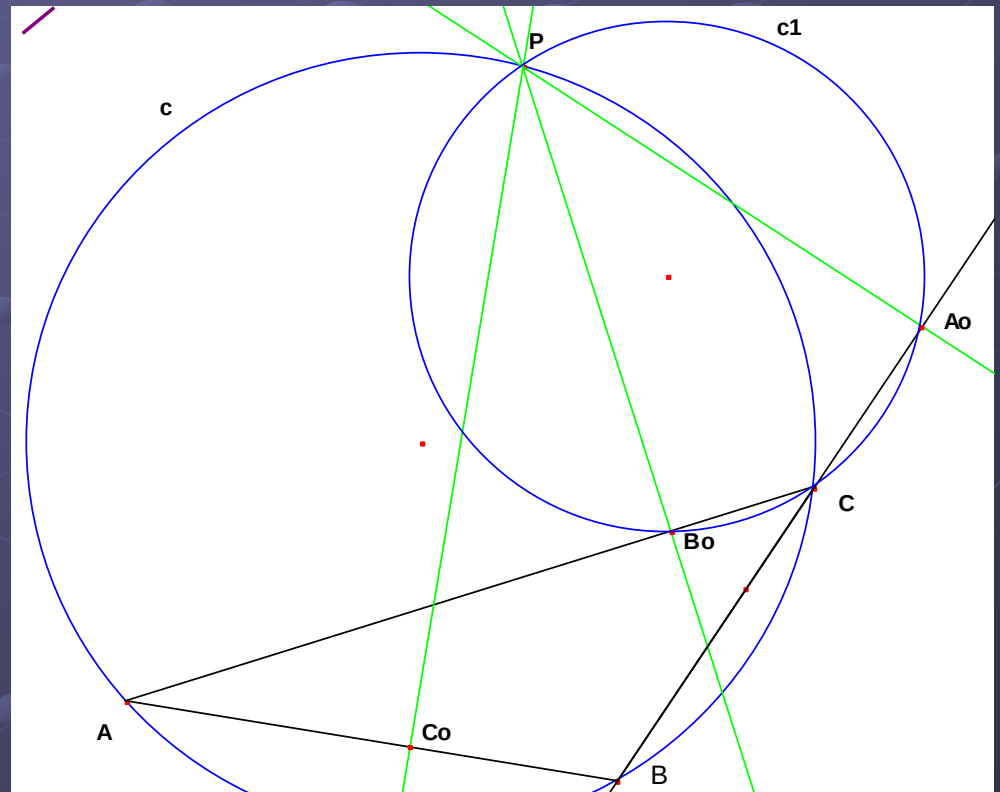
(Deux points d'un cercle situés du même côté de l'arc AB déterminent des angles égaux)

A prouver :

A_0, B_0, C_0 alignés $\Leftrightarrow A_0B_0 = A_0C_0$
 $\Leftrightarrow \hat{P}A_0B_0 = \hat{P}A_0C_0.$

Cercle c_1 passant par $P, A_0, B_0, C.$
(PC hypoténuse de 2 triangles rectangles)

$\hat{P}A_0B_0 = \hat{P}C_0B_0 = \hat{P}C_0A$
(B_0 est sur AC)



Dans c :

$$\angle P\hat{C}A = \angle P\hat{B}A = \angle P\hat{B}C_0$$

(C_0 est sur AB)

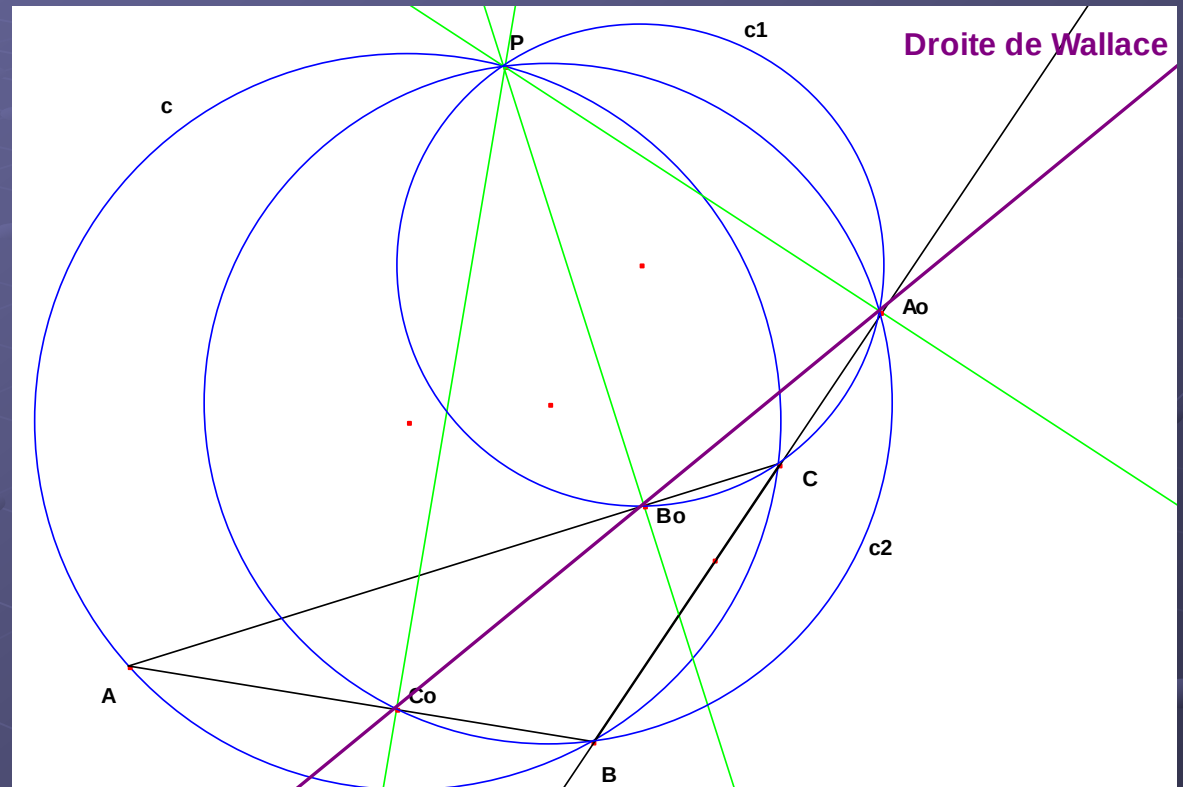
Dans c_2

(par P, A_0, C_0, B) :

$$\angle P\hat{B}C_0 = \angle P\hat{A}_0C_0$$

Conclusion

$$\angle P\hat{A}_0B_0 = \angle P\hat{A}_0C_0.$$

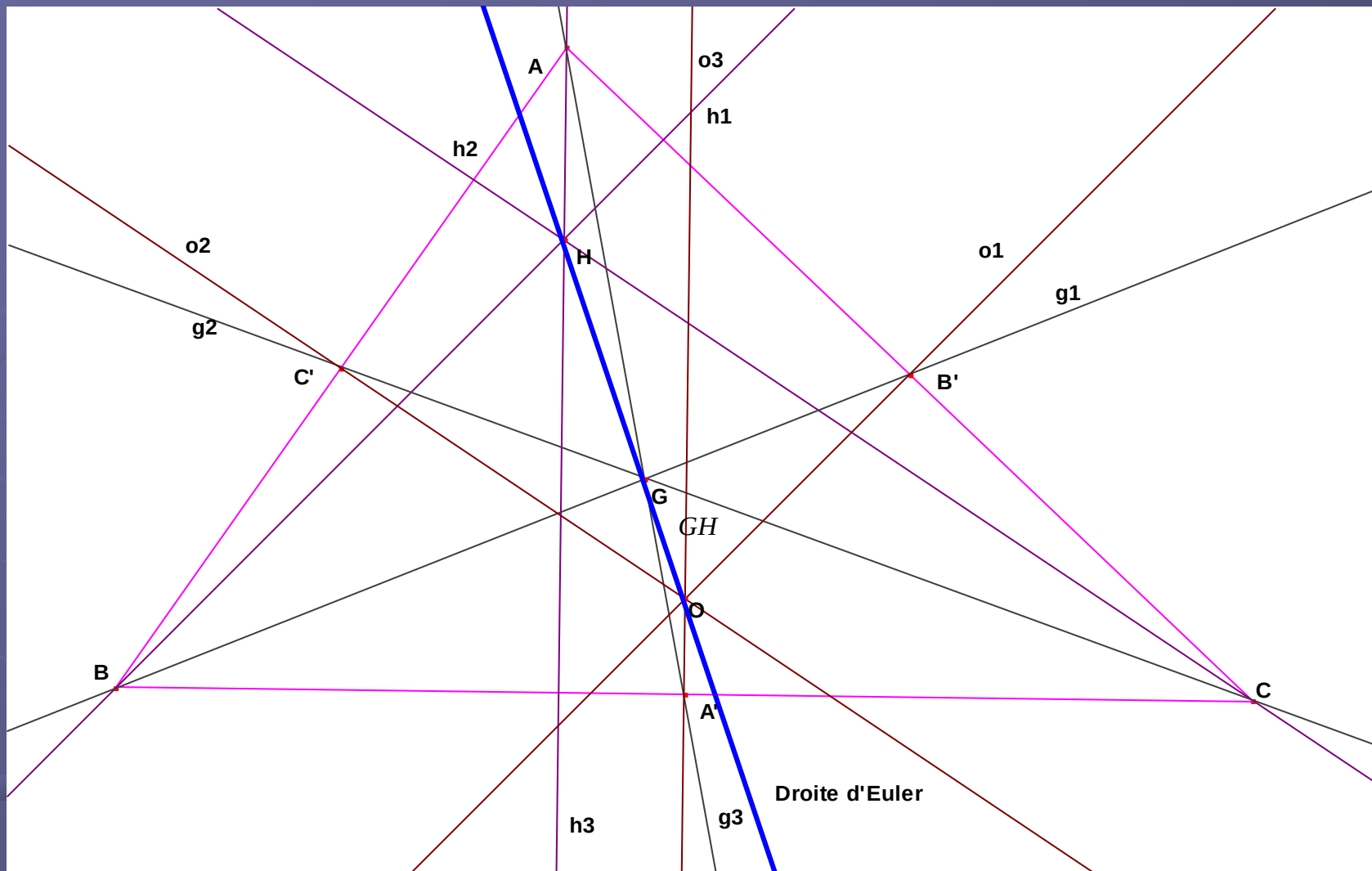


c) Droite d'Euler (1707-1783)

Dans un triangle, l'orthocentre H , le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit au triangle sont alignés.

Démonstration

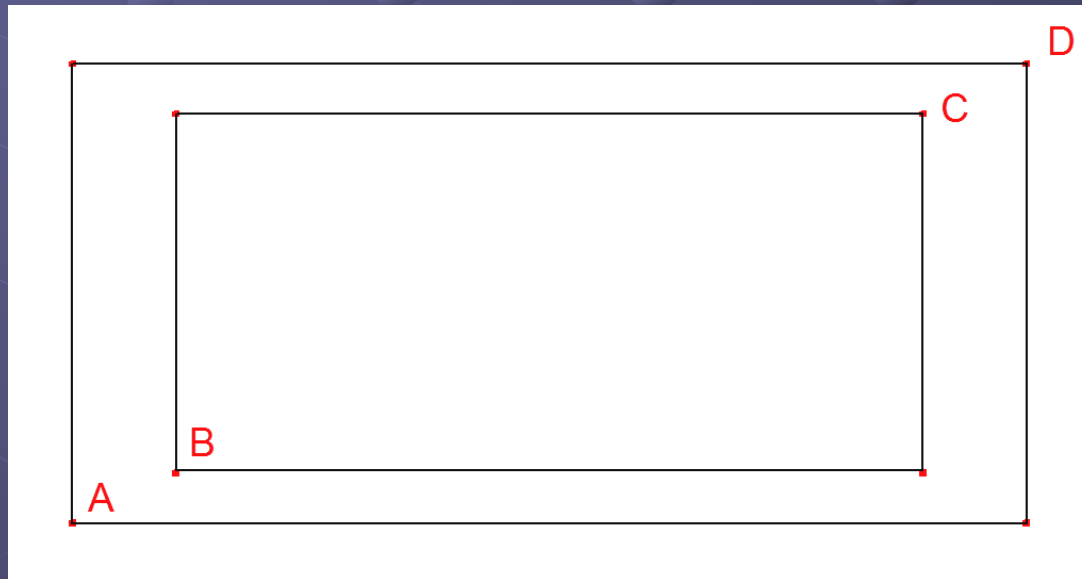
Outils : homothéties, centre de gravité



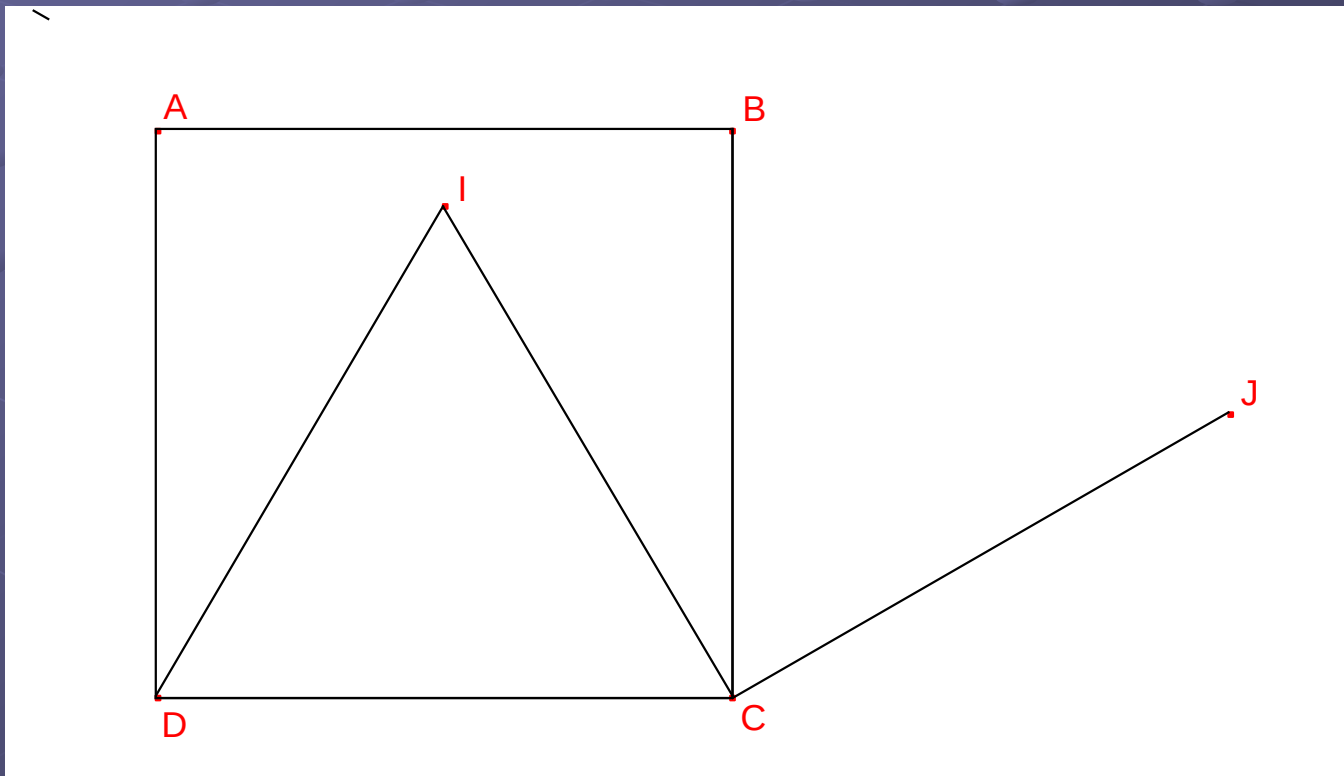
L'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ applique ABC sur $A'B'C'$ et chaque hauteur sur la médiatrice relative au même côté, donc $GH = -2HO$.
 Conclusion : O , G et H sont alignés.

d) Quelques situations-problèmes

1. On donne un cadre rectangulaire en carton et on demande si les 4 points ABCD sont alignés.



2. On donne un carré ABCD et deux triangles équilatéraux DIC et BJC construits sur les côtés du carré. On demande si les points AIJ sont alignés.



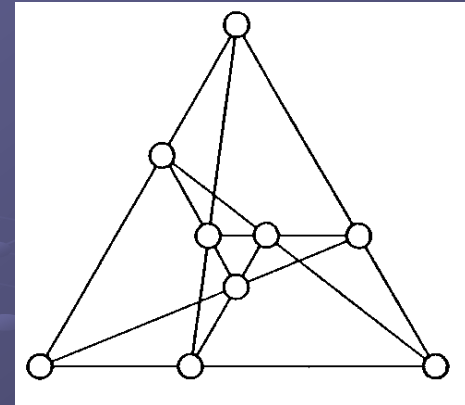
3. Types de jeux et défis

a) Créer un alignement
donné de x points

- Jeu du morpion

O		
	X	

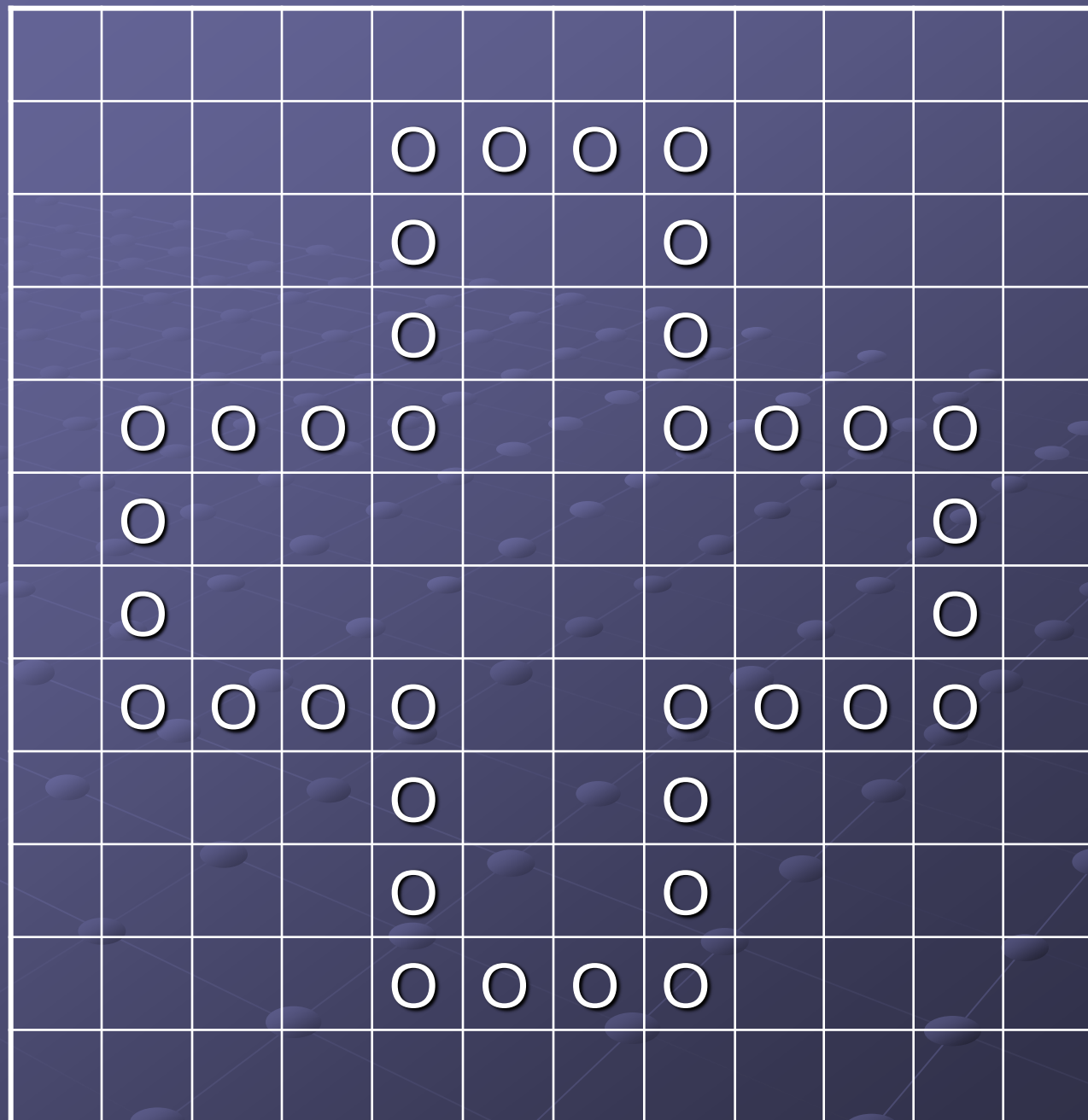
Jeu "équitable" (Gardner) :



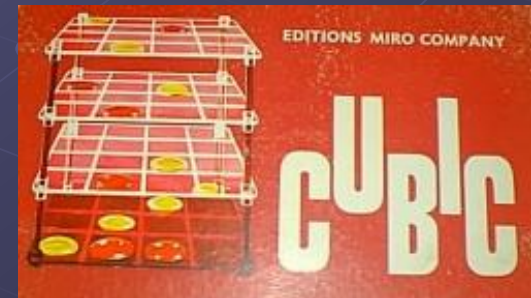
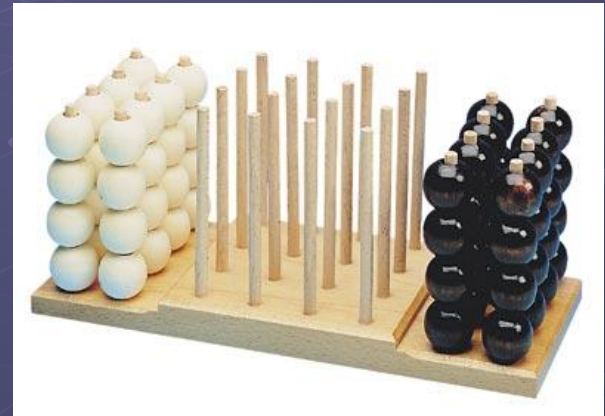
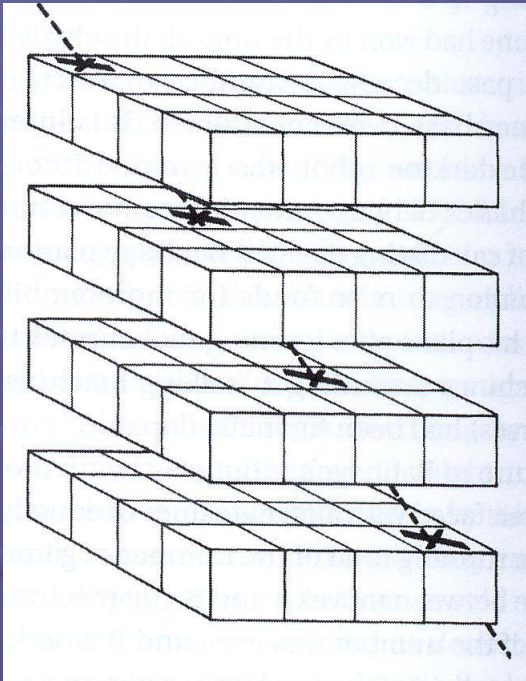
- Jeux proches : puissance 4, "plus 4"



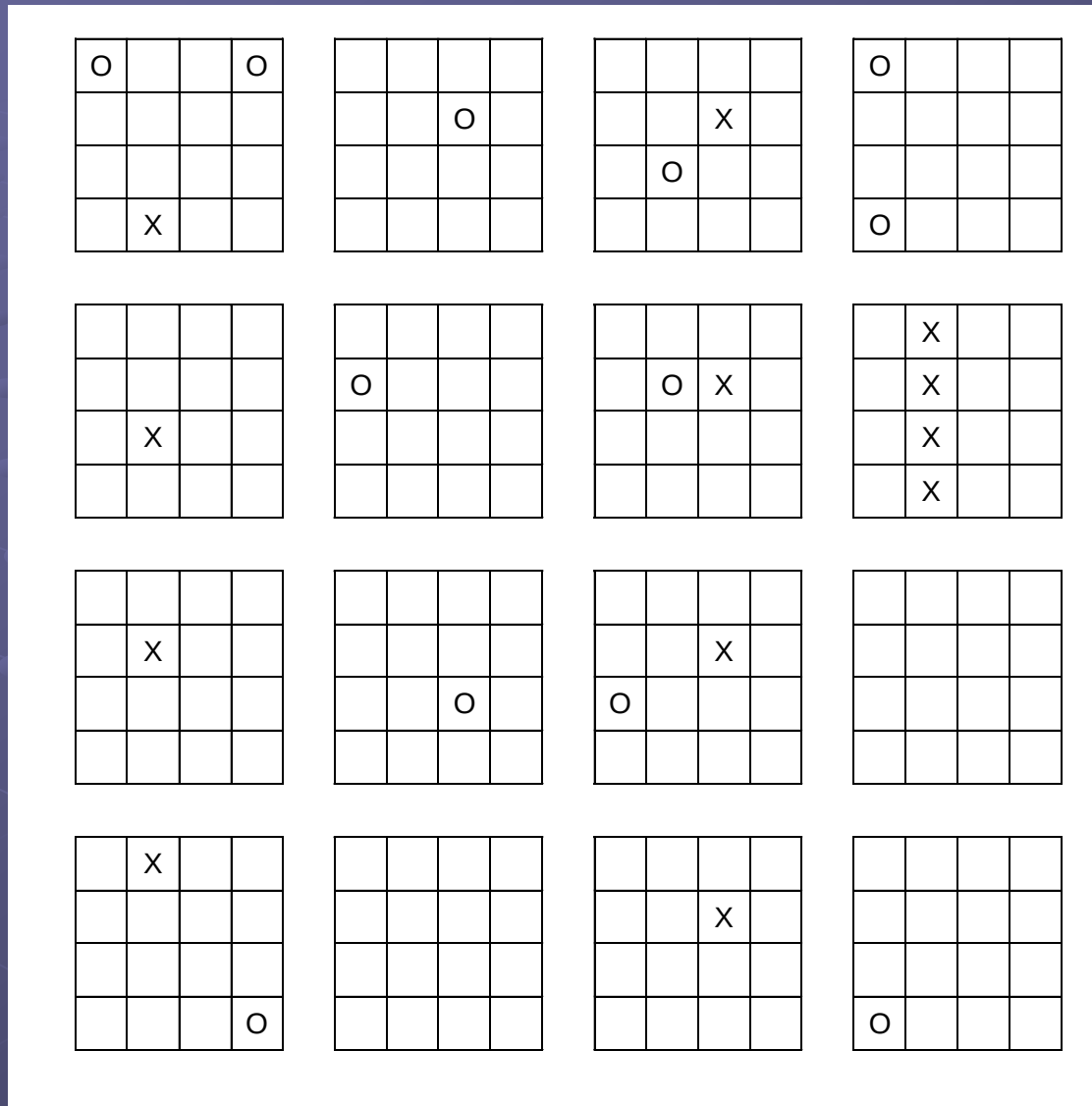
- Morpion solitaire



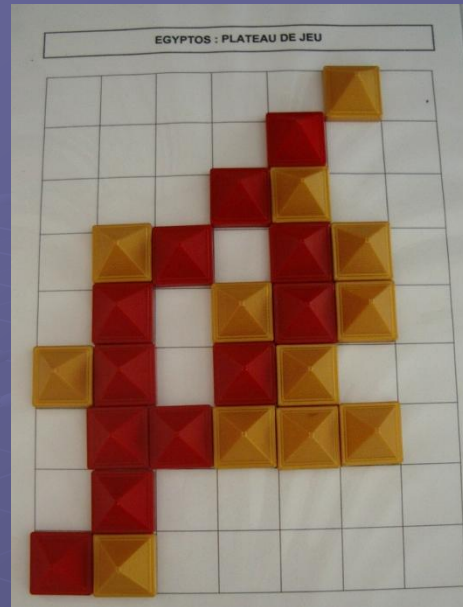
- Morpion et puissance 4 à 3 dimensions



- Morpion à 4 dimensions



- Egyptos



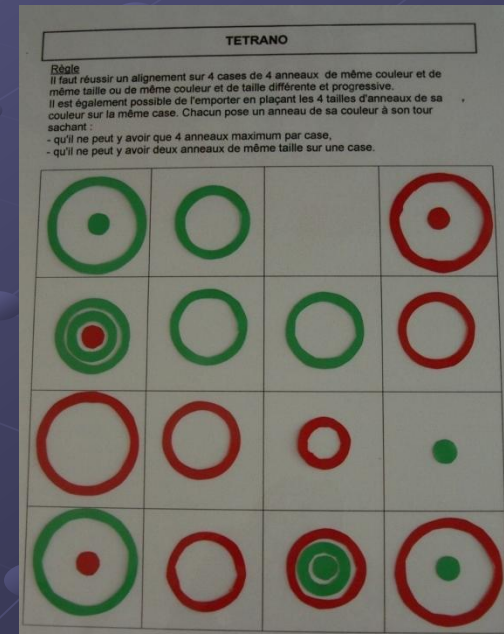
- Taktik



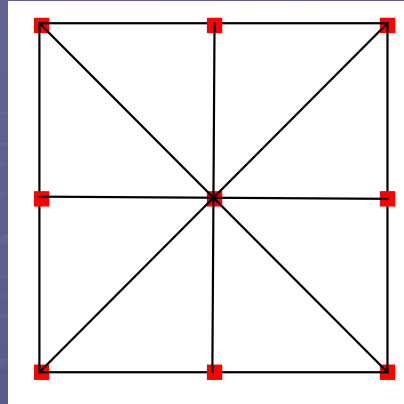
- Gobblets



- Tetrano



- Marelle



a	b	c
d	e	f
g	h	i

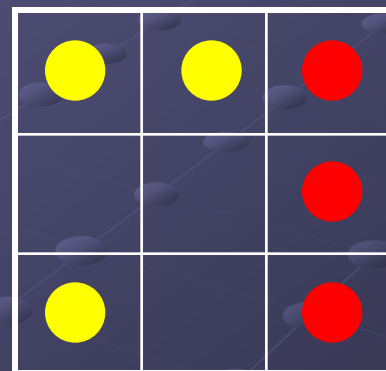
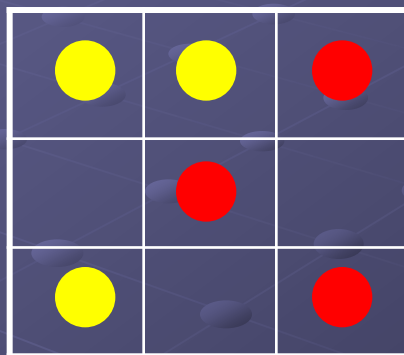
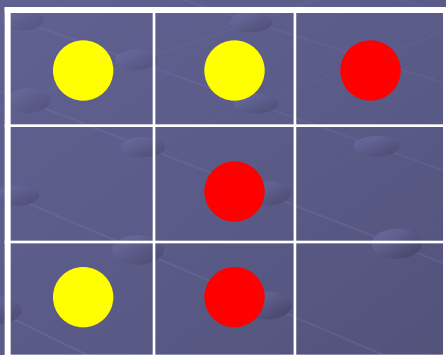
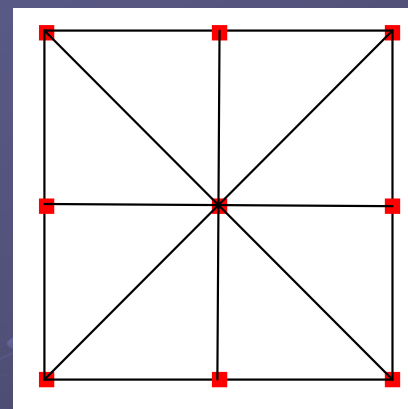
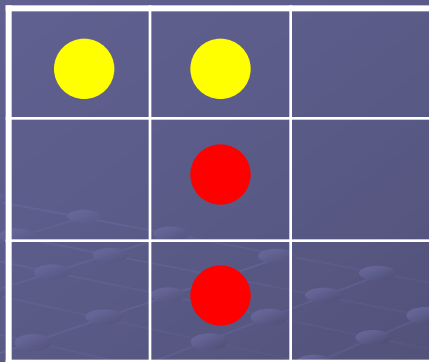
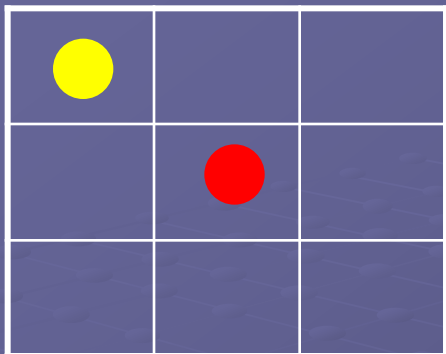
Règle du jeu :

Chaque joueur dispose de 3 pions.

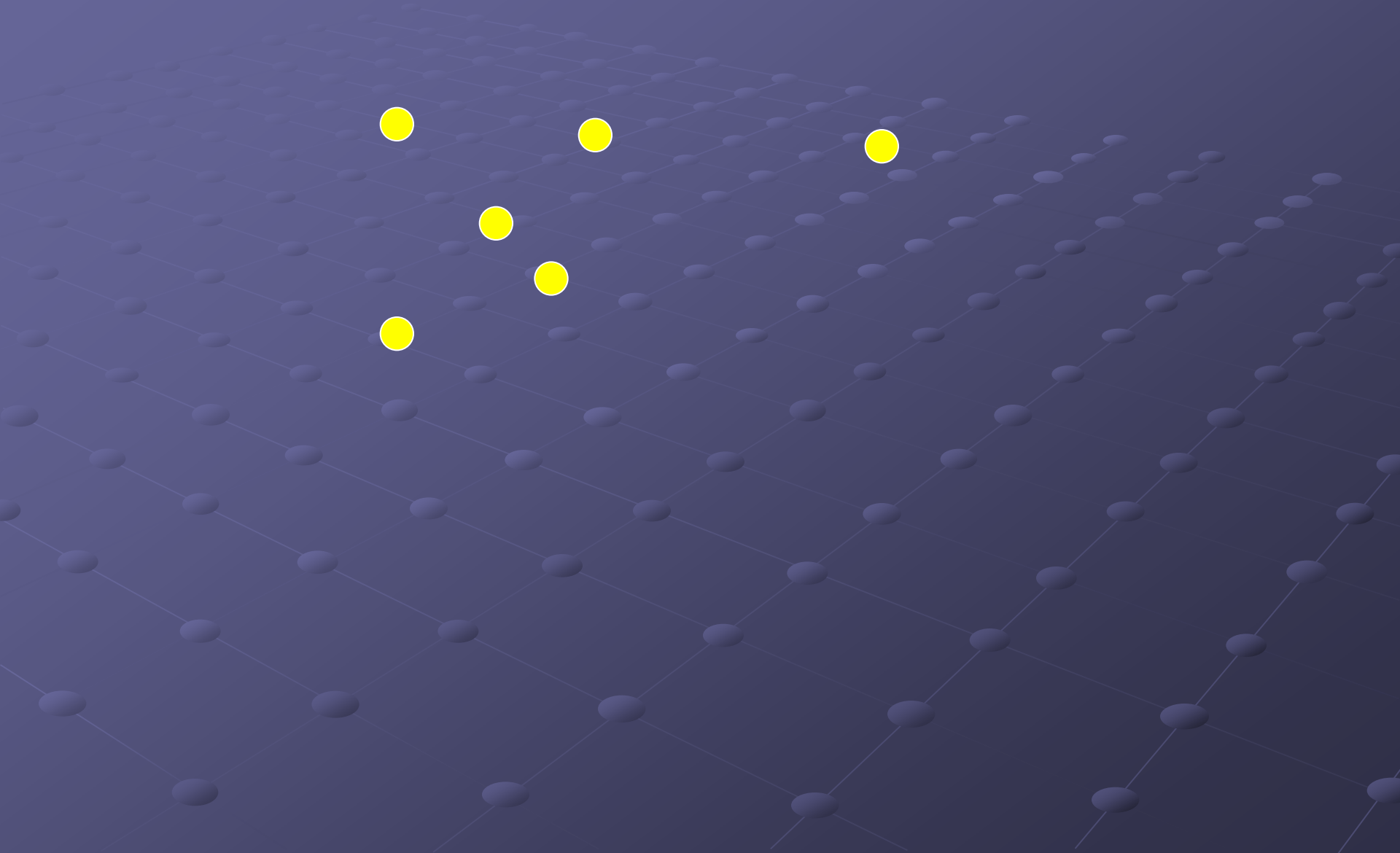
Les pions sont placés un à un sur la marelle.

Ensuite, à son tour, chaque joueur peut déplacer un pion vers une case voisine.

Trouver la stratégie gagnante



b) Créer un alignement donné de x points



c) Eviter les alignements

O					O
		O	O		
	O			O	
	O			O	
		O	O		
O					O

O	O				
		O	O		
				O	O
O	O				
		O	O		
				O	O

Autre solution

O		O			
		O		O	
O	O				
				O	O
	O		O		
			O		O

Essai de généralisation (autre nombre de cases)

O	O		
		O	O
O	O		
		O	O

O	O			
		O	O	
O				O
	O	O		
			O	O

O	O						
		O	O				
				O	O		
						O	O
O	O						
		O	O				
				O	O		
						O	O

Autre famille de solutions, ne respectant pas la contrainte de la diagonale.

○	○		
○		○	
	○		○
		○	○

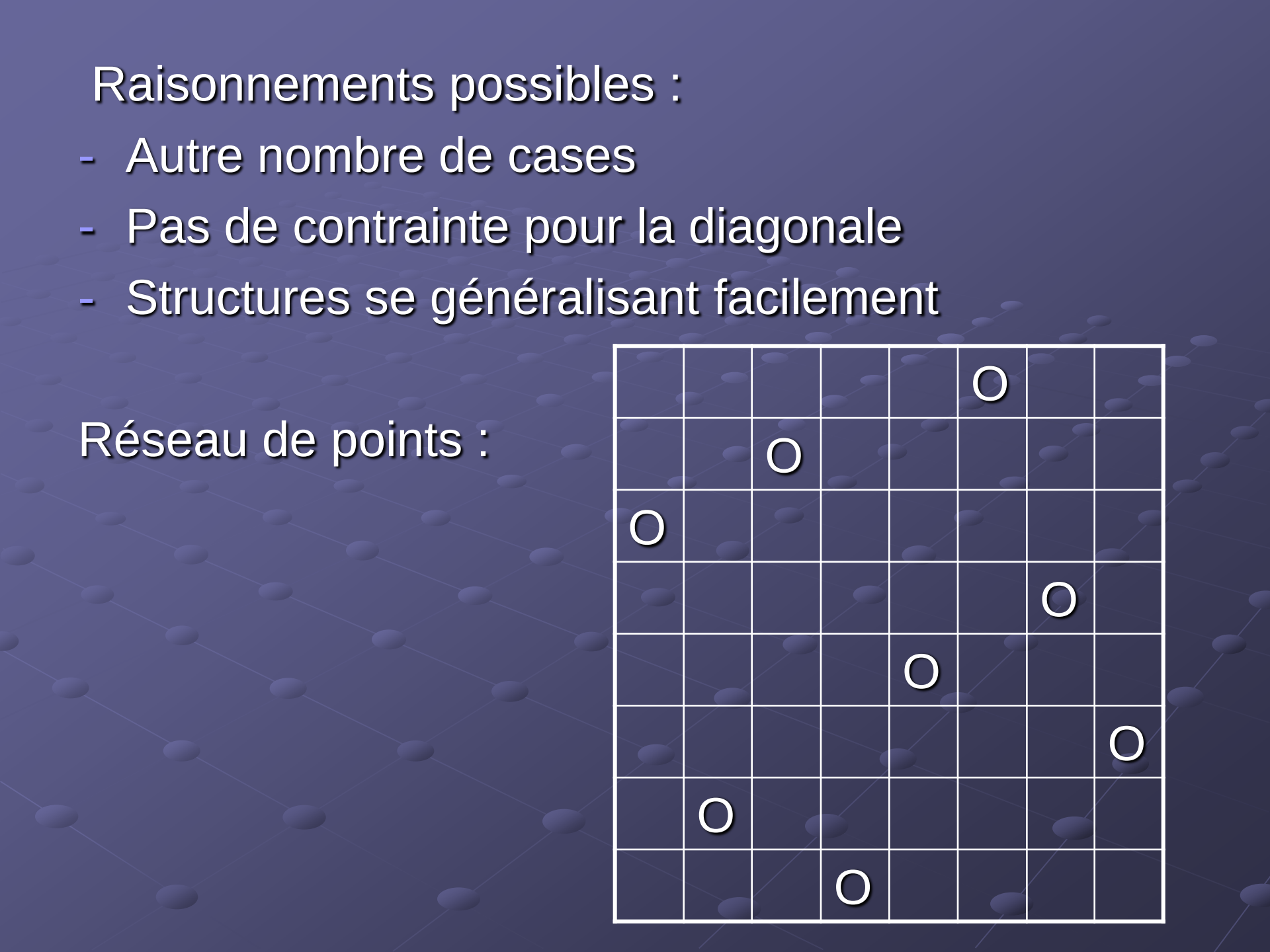
○	○			
○		○		
	○		○	
		○		○
			○	○

○	○						
○	○						
		○	○				
		○	○				
				○	○		
				○	○		
						○	○
						○	○

Raisonnements possibles :

- Autre nombre de cases
- Pas de contrainte pour la diagonale
- Structures se généralisant facilement

Réseau de points :



					O		
		O					
O							
						O	
				O			
							O
	O						
			O				

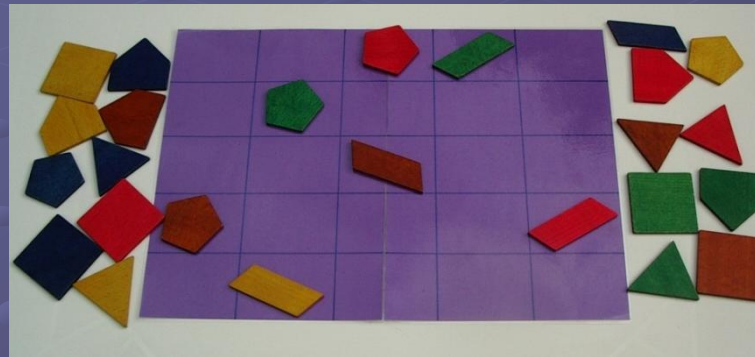
Antimorphon :

(aucun alignement de 4 pions identiques autorisé)

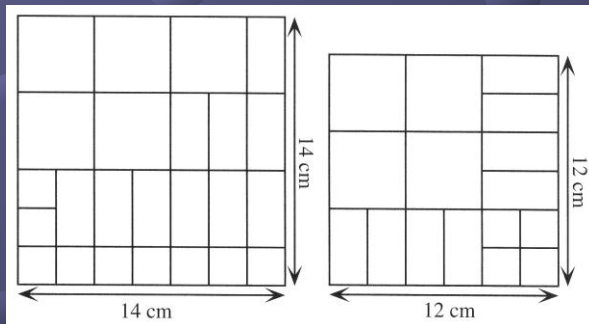
	X	O	O		O	O
O	O		O	O		
O						X
	O					
	X	X		X	O	X
O		X	X	X		
X	X		X			X

Quelques autres jeux possibles abordant le thème des alignements :

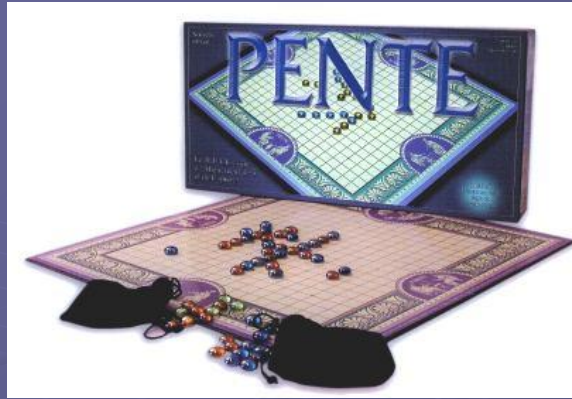
- Quarto, Quintus, Qwirkle



- Combis et minicombis,



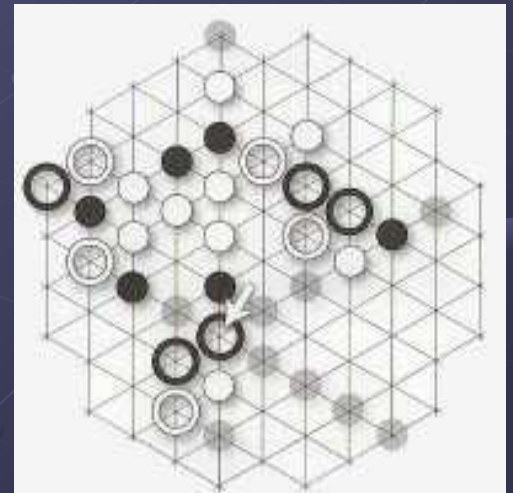
- Pente



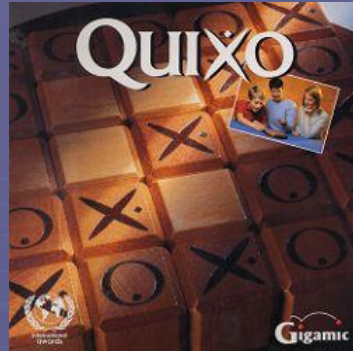
- Pentago



- Yinsh



- Quixo



- Bango



- Patzam



- MadMath - FouMath



- Just for Fun



- Zahlenfahnder



4. Pour aller plus loin

1. Minimiser le nombre de segments de droites consécutifs pour couvrir un réseau de points donné.

(4 segments)

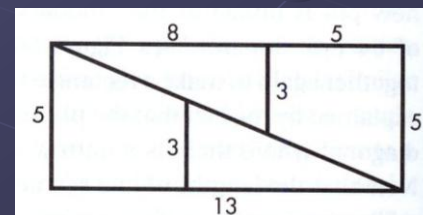
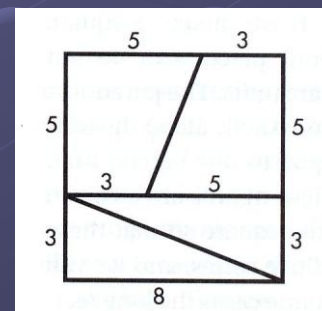
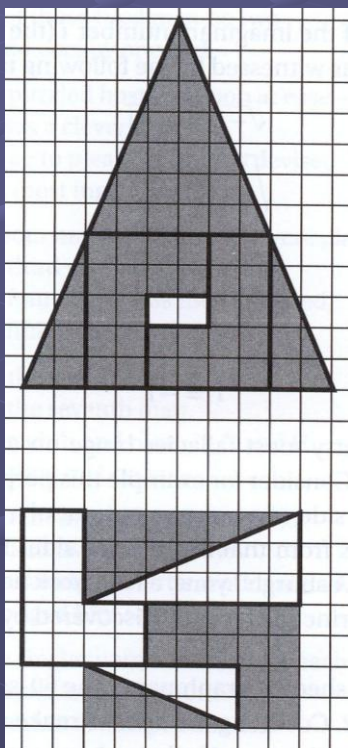
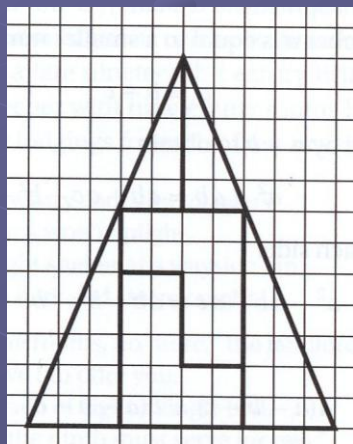


(6 segments)



2. Paradoxe : découpage et aires différentes

Exemples : Triangle de Curry, paradoxe de Lewis Carroll (repris par M. Gardner)

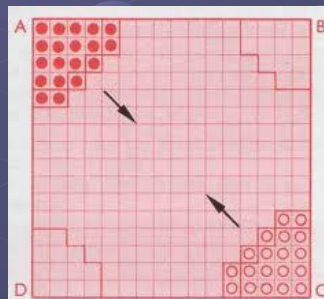


3. Alignements et déplacements

- Dames, dames chinoises



- Halma ou Alma



- Solitaire



- Grenouilles, Hot Spot



Conclusion

- Diversité des exploitations possibles ;
- quelques résultats ;
- démarches d'exploration progressivement structurées ;
- développement de la vision dans le plan et dans l'espace ;
- pistes vers d'autres défis, d'autres thèmes ;
- approche attractive des mathématiques.

Références et liens

- Diaporama mis à jour sur le site
<http://www.jeuxmathematiquesbruxelles.be/ressource/exposes/>
- Article paru dans le Bulletin n°482 de l'APMEP en mai 2009 et disponible depuis fin 2012 sur le site de l'APMEP :
www.apmep.asso.fr/Les-alignements-source-de-bien-des
- Fiches de jeux : géométrie, jeux d'orientation dans le plan et dans l'espace :
<http://www.jeuxmathematiquesbruxelles.be/wp-content/uploads/2013/02/3JeuxOrientation2013fev.pdf>

Merci pour votre attention
et bon amusement !

Joëlle Lamon

Haute Ecole Francisco Ferrer (Bruxelles)

www.jeuxmathematiquesbruxelles.be

joellelamon@yahoo.fr